EPFL – Automne 2025	Pr. M. Picasso
Analyse III – PH	**Exercices**
Série 11	27 novembre 2025

Exercice 1.
Soit $f(z) = p(z)/q(z)$, avec p et q des fonctions holomorphes au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

- z_0 est un zéro d'ordre k de p i.e. (si $p(z_0) \neq 0$, on pose $k = 0$)

$$p(z_0) = \ldots = p^{(k-1)}(z_0) = 0, p^k(z_0) \neq 0;$$

- z_0 est un zéro d'ordre l de q i.e. (si $q(z_0) \neq 0$, on pose $l = 0$)

$$q(z_0) = \ldots = q^{(l-1)}(z_0) = 0, q^l(z_0) \neq 0.$$

Montrer que

1. Si $l \leq k$, z_0 est un point régulier de f;
2. Si $l > k$, z_0 est un pôle d'ordre $l - k$ de f.

Exercice 2.
Soit $f(z) = p(z)/q(z)$, avec p et q des fonctions holomorphes au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $p(z_0) \neq 0$ et z_0 est un zéro simple de q (i.e. d'ordre 1). Montrer que

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Exercice 3.
Exercice 12.2 du livre

Exercice 4.
Exercice 12.3 du livre

Exercice 5.
Exercice 12.9 du livre

Exercice 6.
Exercice 12.10 du livre

Exercice 7.
Exercice 12.12 du livre

Exercice 8.
Soit $a > 0$. Calculer

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2 - i\varepsilon}.$$