



Ens : Pr. Marco PICASSO  
ANALYSE III - PH  
14.01.2025  
15:15-18:15

# F6

## FAKE 6

SCIPER: **666666**













Salle: **AAC137**

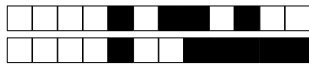
Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 32 pages, les dernières pouvant être vides.

Ne pas dégrafer.

Il y a 14 points pour des questions à choix multiples et 17 points pour des questions ouvertes.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une calculatrice et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à choix multiples, on comptera :
  - +1/ $N$  point si vous cochez une réponse correcte, où  $N$  est le nombre de réponses correctes;
  - 0 point si vous ne cochez rien;
  - -1/ $M$  point si vous cochez une réponse incorrecte, où  $M$  est le nombre de réponses incorrectes.
- Deuxième partie : pour les questions ouvertes, le nombre de points maximum est noté au-dessus de chaque question. Laissez les cases à cocher vides !
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
     		



+180/2/31+



### Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la/les case(s) correspondant à la/aux réponse(s) correcte(s) sans faire de ratures.

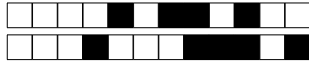
**Question 1** Soit  $\Sigma = (0, 1)^2$  le carré unité. On note  $\partial\Sigma$  le bord de  $\Sigma$ . Soit  $\vec{v}(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$  pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$\int_{\partial\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 0.$

$\int_{\partial\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2.$

$\int_{\partial\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 3.$

$\int_{\partial\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 1.$



**Question 2** Pour  $r > 1$ , soit  $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$  le demi-cercle de rayon  $r$ . Soit encore  $z_k = \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{4} + (k-1)\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . On a :

$$\int_{-r}^r \frac{dx}{1+x^4} + \int_{C_r} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \sum_{k=1}^m \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{1+z^4},$$

où

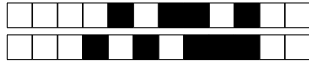
- $m = 3$ .
- $m = 2$ .
- $m = 4$ .
- $m = 1$ .

**Question 3** On a

$$\left| \int_{C_r} \frac{dz}{1+z^4} \right| \leq C \frac{r}{r^4 - 1},$$

avec

- $C = \pi$ .
- $C = \frac{\pi}{2}$ .
- $C = 1$ .



**Question 4** Soit  $\gamma$  le cercle de centre 0 et de rayon 1. On a  $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$  lorsque  $f$  est définie par :

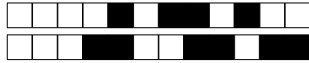
$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2}$ .

$f(z) = \frac{1}{z^2}$ .

$f(z) = \frac{1}{z+2}$ .

$f(z) = \frac{1}{z}$ .

$f(z) = \log(z+2)$ .



**Question 5** Soit  $0 < r < R$  et soit  $\Gamma$  la courbe simple, fermée et régulière par morceaux définie par  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ , où

$$\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R} : r \leq x \leq R\}$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

$$\Gamma_3 = \{x \in \mathbb{R} : -R \leq x \leq -r\}$$

$$\Gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

On a :

$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 0.$

$\int_{\Gamma_2} \frac{1}{z} dz = R\pi i.$

$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z} dz = \log\left(\frac{R}{r}\right).$

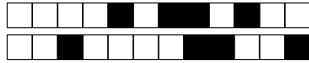


**Question 6** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domaine régulier de normale extérieure unité  $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ ,  $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ . On note  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . On a

$\iiint_{\Omega} \text{rot } \vec{F} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} (\vec{\nu} \wedge \vec{F}) ds.$

$\iiint_{\Omega} \partial_i f dx_1 dx_2 dx_3 = - \iint_{\partial\Omega} f \nu_i ds, i = 1, 2, 3.$

$\iiint_{\Omega} \text{rot } \vec{F} dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\Omega} (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) dx_1 dx_2 dx_3.$



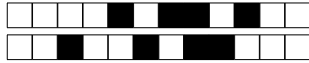
**Question 7** Soit  $\Omega = (0, 1)^3$  le cube unité. On note  $\partial\Omega$  le bord de  $\Omega$  et  $\vec{\nu}$  la normale extérieure unitaire. Soit  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$  pour tout  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . On a :

$\iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nu} ds = 2.$

$\iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nu} ds = 3.$

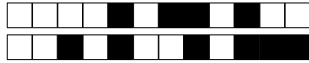
$\iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nu} ds = 0.$

$\iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nu} ds = 1.$



**Question 8** Soit  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z \neq 0$ . On pose  $z = x + iy$ ,  $f(z) = u + iv$ . On a :

- Si  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$  pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors  $1 - 2\alpha u + 2\beta v = 0$ .
- Si  $\alpha x + \beta y = 0$  pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors  $\alpha u - \beta v = 0$ .
- Si  $\alpha x + \beta y = \frac{\gamma}{2}$  pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $\gamma \in \mathbb{R}^*$ , alors  $\left(u - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \left(v - \frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2}$ .
- $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$ .



+180/10/23+

**Question 9** Soit  $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^3}$ . On a :

- $\text{Res}_0(f) = -1$ .
- $\text{Res}_0(f) = 1$ .
- $\text{Res}_0(f) = 0$ .

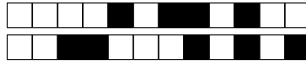


**Question 10** Soit  $k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ ,  $T \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ . On suppose que pour tout domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  régulier, de bord  $\partial\Omega$  et de normale extérieure unité  $\vec{\nu}$  on a

$$\iint_{\partial\Omega} -k\nabla T \cdot \vec{\nu} ds = \iiint_{\Omega} f dx_1 dx_2 dx_3.$$

On en déduit que dans  $\mathbb{R}^3$ , on a :

- $-k\Delta T = f.$
- $-k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) = f.$
- $-\operatorname{div}(k\nabla T) = f.$
- $-\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \right) = f.$



**Question 11** Soit  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . On cherche  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 1 & \text{dans } \Omega \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Soit

$$V = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \iint_{\Omega} v^2 dx_1 dx_2 < +\infty, \iint_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx_1 dx_2 < +\infty, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

On a :

$\iint_{\Omega} \left( \nabla u \cdot \nabla v - \frac{\partial u}{\partial x_1} v \right) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} v dx_1 dx_2 \quad \forall v \in V.$

$\iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} v dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall v \in V.$

Si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions de (1), alors  $\iint_{\Omega} \|\nabla(u_1 - u_2)\|^2 dx_1 dx_2 = 0.$

La solution de (1), si elle existe, est unique.

$\iint_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} u dx_1 dx_2.$

**Question 12** Soit  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N \in V$  des fonctions linéairement indépendantes. La méthode de Galerkin correspondant à (1) est équivalente à résoudre le système linéaire  $A\vec{u} = \vec{f}$ , où  $\vec{u}, \vec{f} \in \mathbb{R}^N$  et  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . On a :

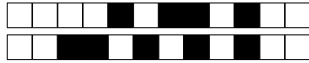
$A_{ij} = \iint_{\Omega} \left( \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \varphi_i \right) dx_1 dx_2$

$A_{ij} = \iint_{\Omega} \left( \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \varphi_j \right) dx_1 dx_2$

$f_i = \iint_{\Omega} \varphi_i(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$

$A_{ij} = \iint_{\Omega} \left( \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \varphi_j \right) dx_1 dx_2$

$A_{ij} = \iint_{\Omega} \left( \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \varphi_i \right) dx_1 dx_2$



**Question 13** Soit  $\gamma$  le cercle de centre 0 et de rayon 1. On a :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2 \cos \theta + \sin \theta} = \alpha \int_{\gamma} \frac{dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i},$$

où

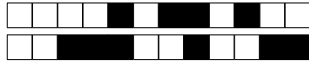
- $\alpha = 1.$
- $\alpha = 4.$
- $\alpha = 2.$

**Question 14** On admet que le polynôme  $(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i$  admet  $2 - i$  et  $\frac{2 - i}{5}$  comme racines. On a :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} = \frac{\pi}{\beta},$$

où

- $\beta = 1.$
- $\beta = 2.$
- $\beta = 4.$



### Deuxième partie, questions ouvertes

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

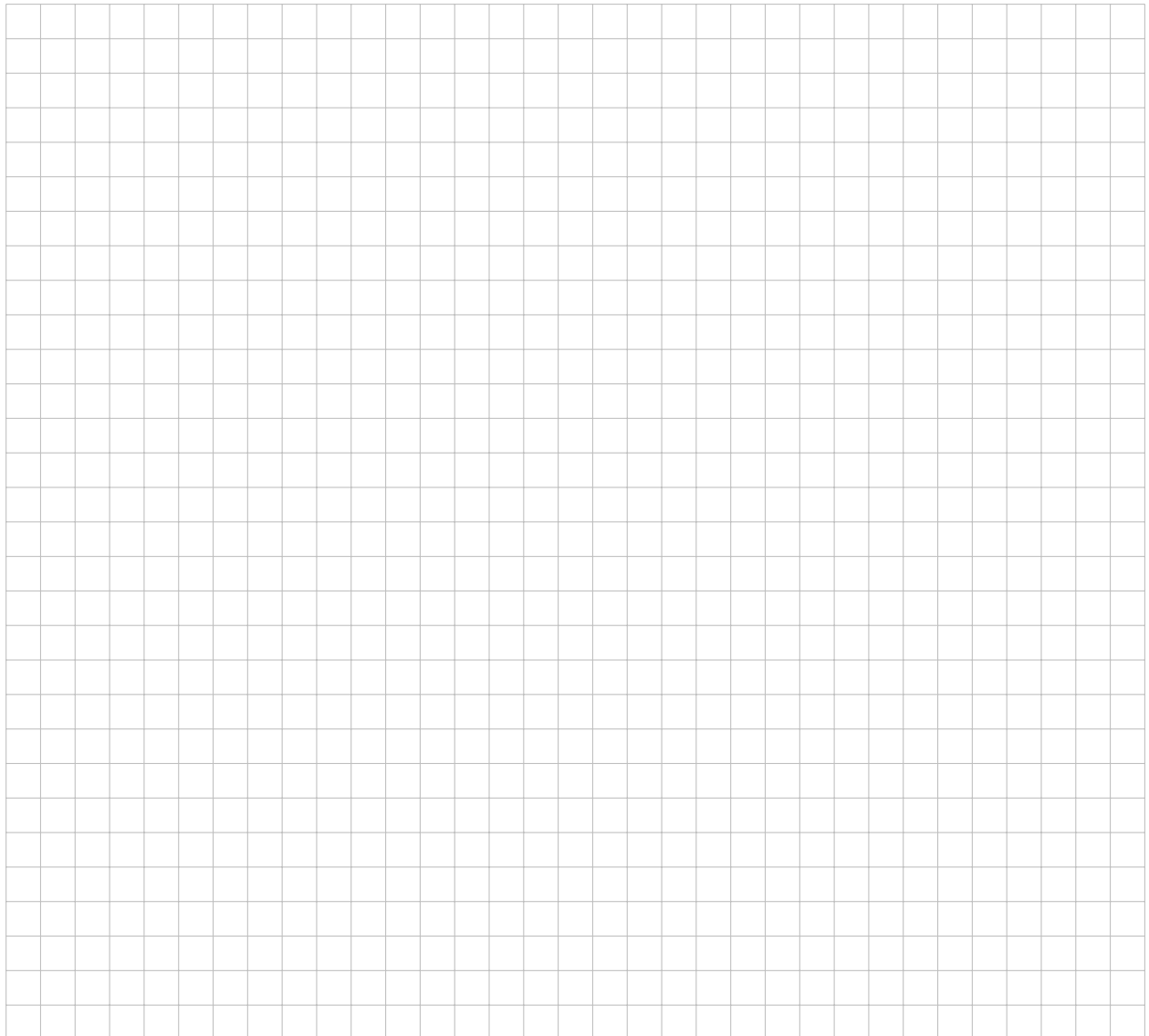
**Question 15:** *Cette question est notée sur 2 points.*

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	2
--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---

Soit  $a, b > 0$  donnés et

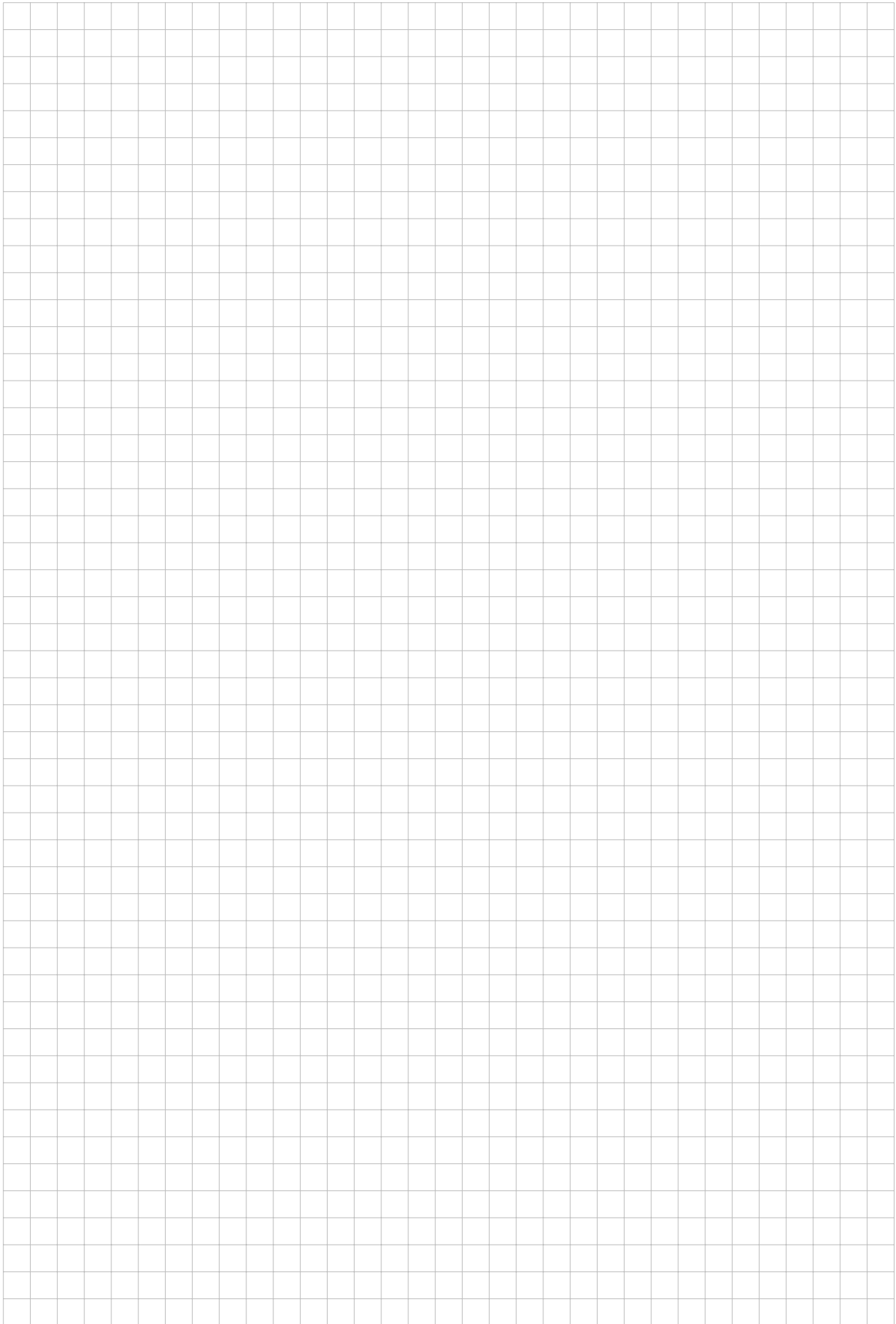
$$\Sigma = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1, x_3 = 0 \right\}.$$

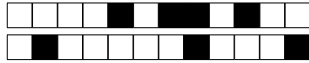
Calculer l'aire de  $\Sigma$ .





+180/15/18+



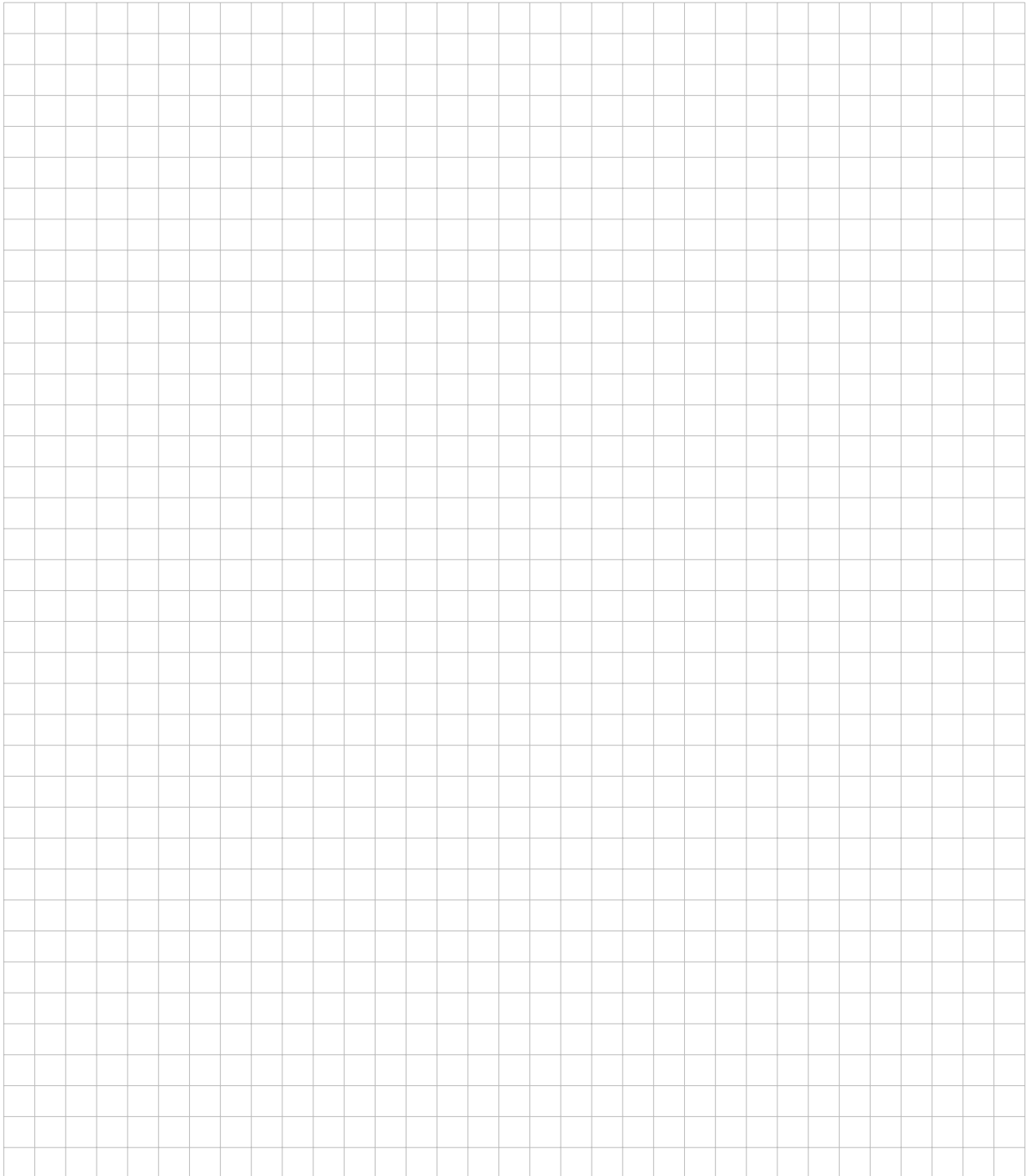


**Question 16:** *Cette question est notée sur 5 points.*

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	5
--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---

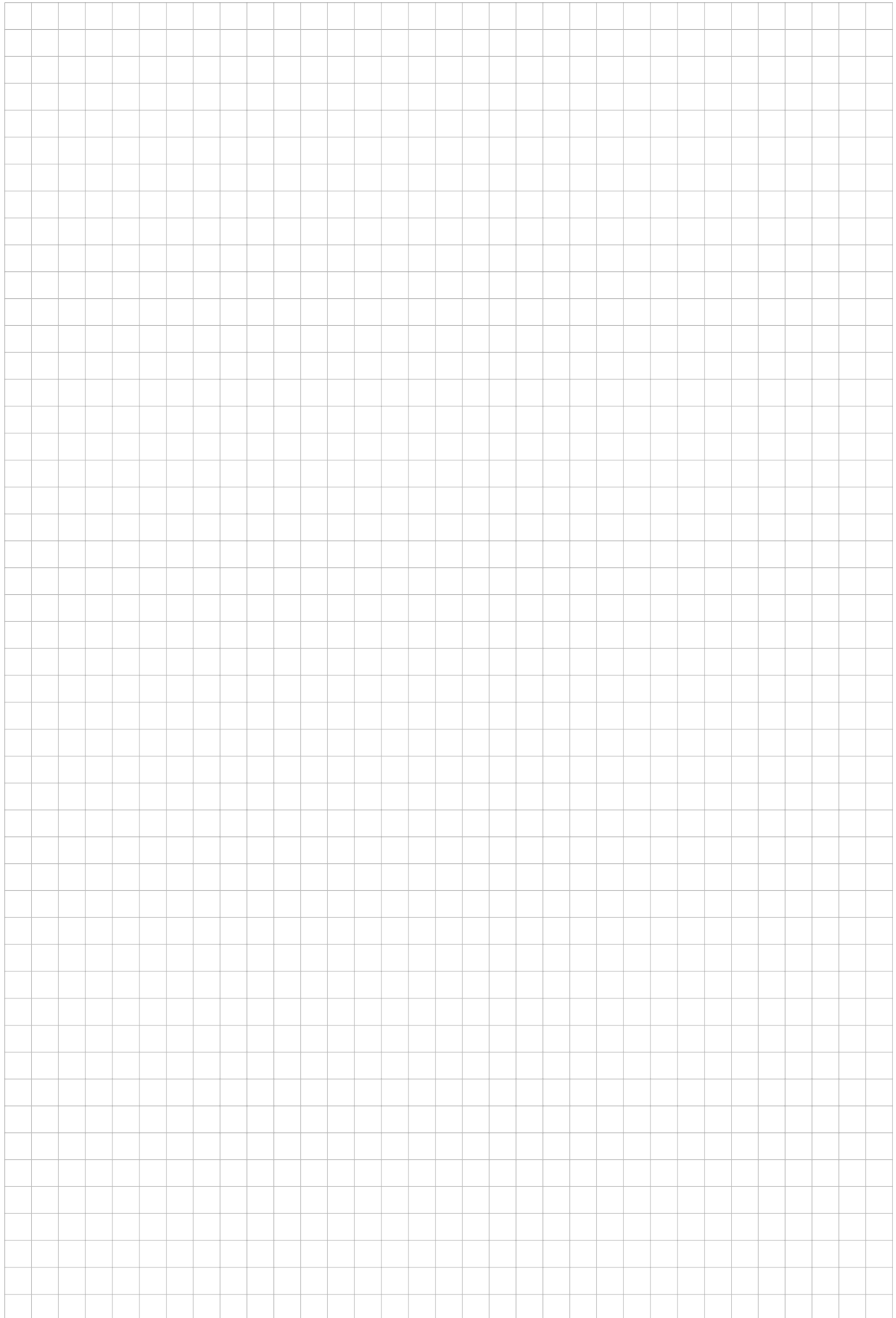
Vérifier le théorème de Stokes pour

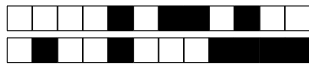
$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}$$
$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, -x_2x_3^2, -x_2^2x_3).$$





+180/17/16+



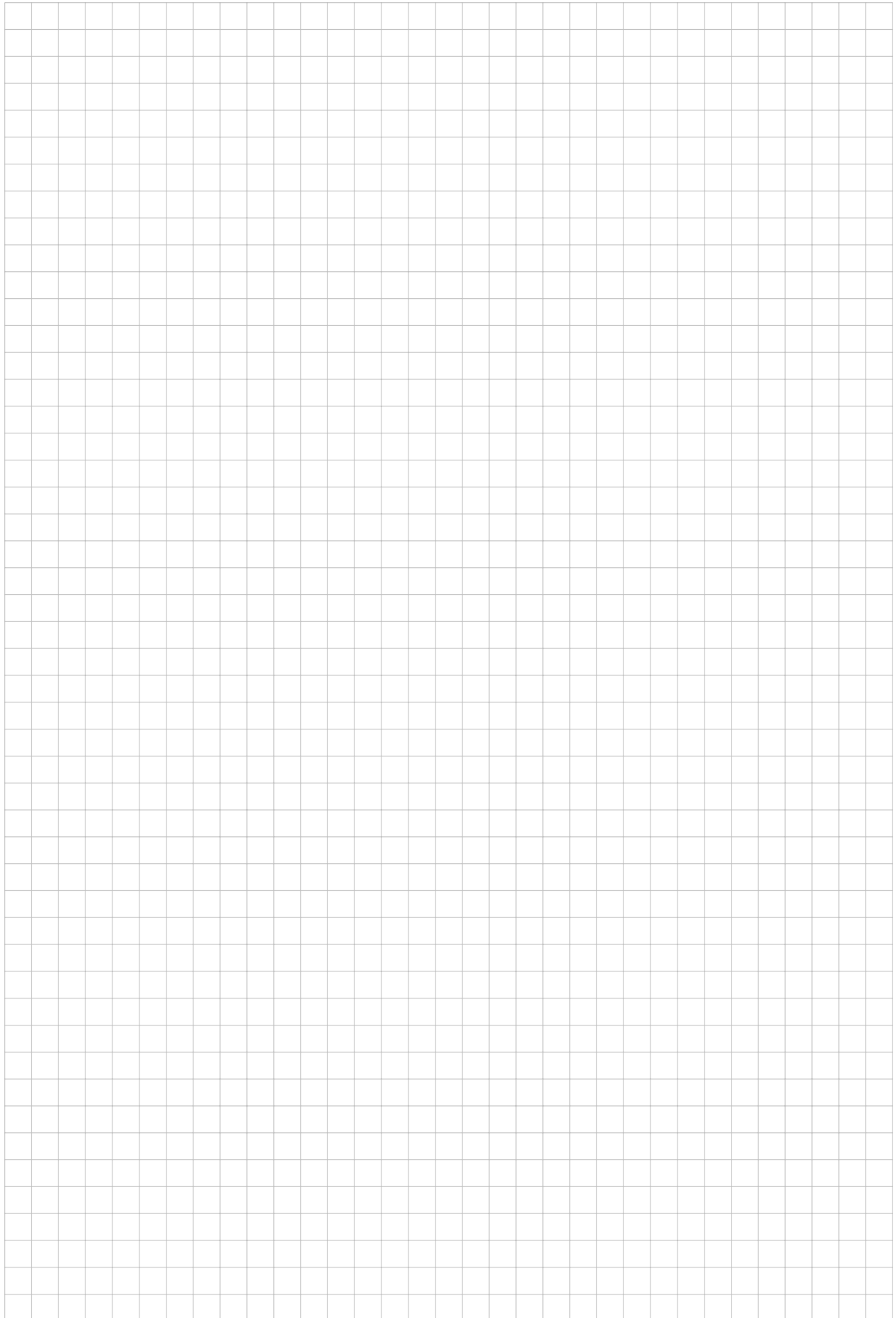


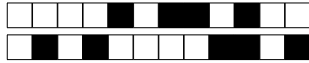
+180/18/15+





+180/19/14+





Question 17: Cette question est notée sur 5 points.

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	5
--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---	--------------------------	----	--------------------------	---

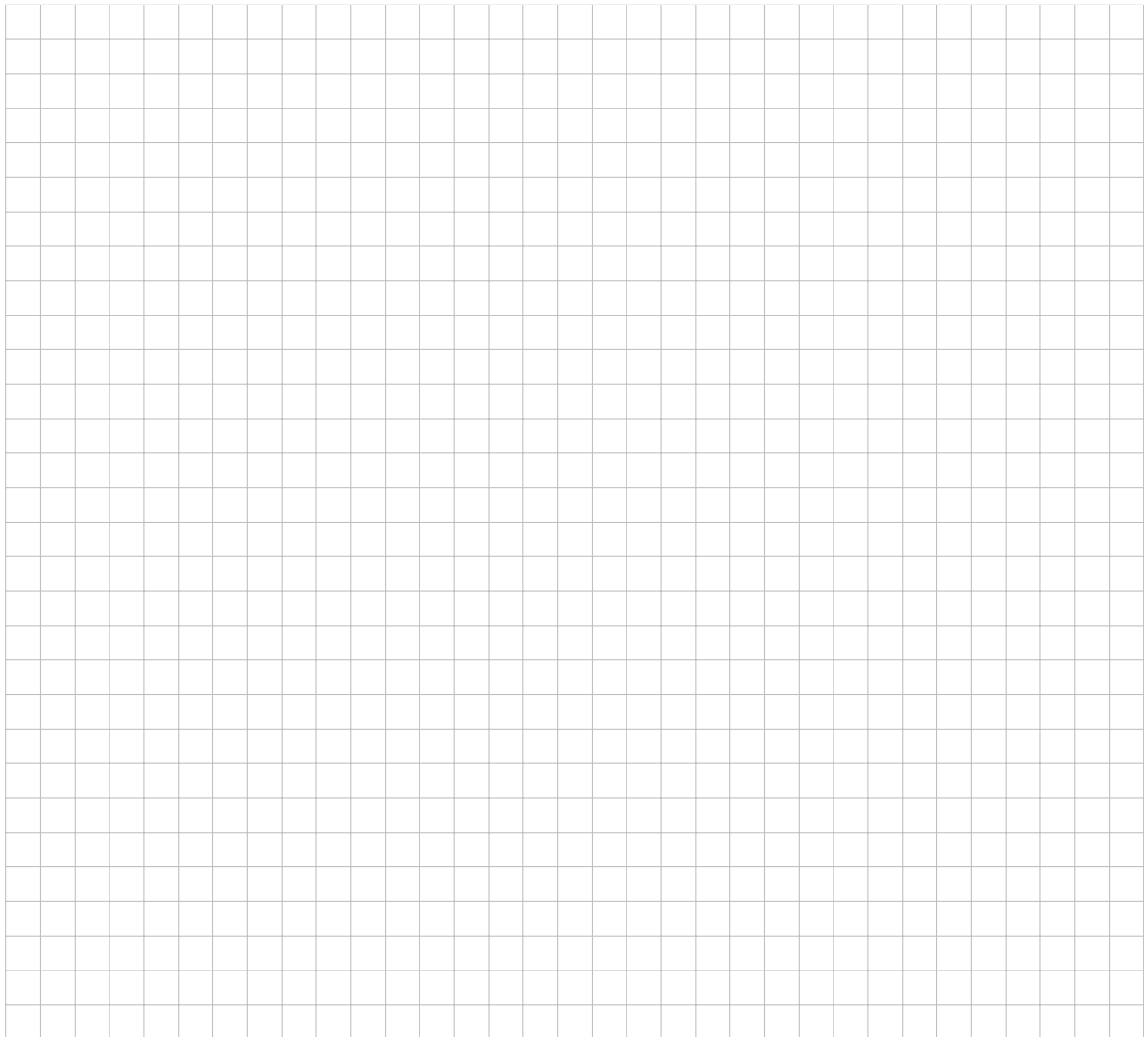
Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert borné et simplement connexe,  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^2 \in \mathcal{C}^1(D)$  telle que  $\varphi(x_1, x_2) > 0$  pour tout  $(x_1, x_2) \in D$ ,  $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in D, 0 < x_3 < \varphi(x_1, x_2)\}$  et  $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  la normale extérieure unitaire à  $\partial\Omega$ . On notera  $\partial\Omega = D \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , où  $\nu_3 = 0$  sur  $\Sigma_2$ .

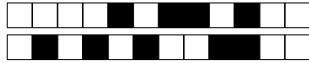
- (a) Sur un dessin, représenter  $\Omega, \Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\vec{\nu}$ .
- (b) Montrer que

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_D (f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) - f(x_1, x_2, 0)) dx_1 dx_2.$$

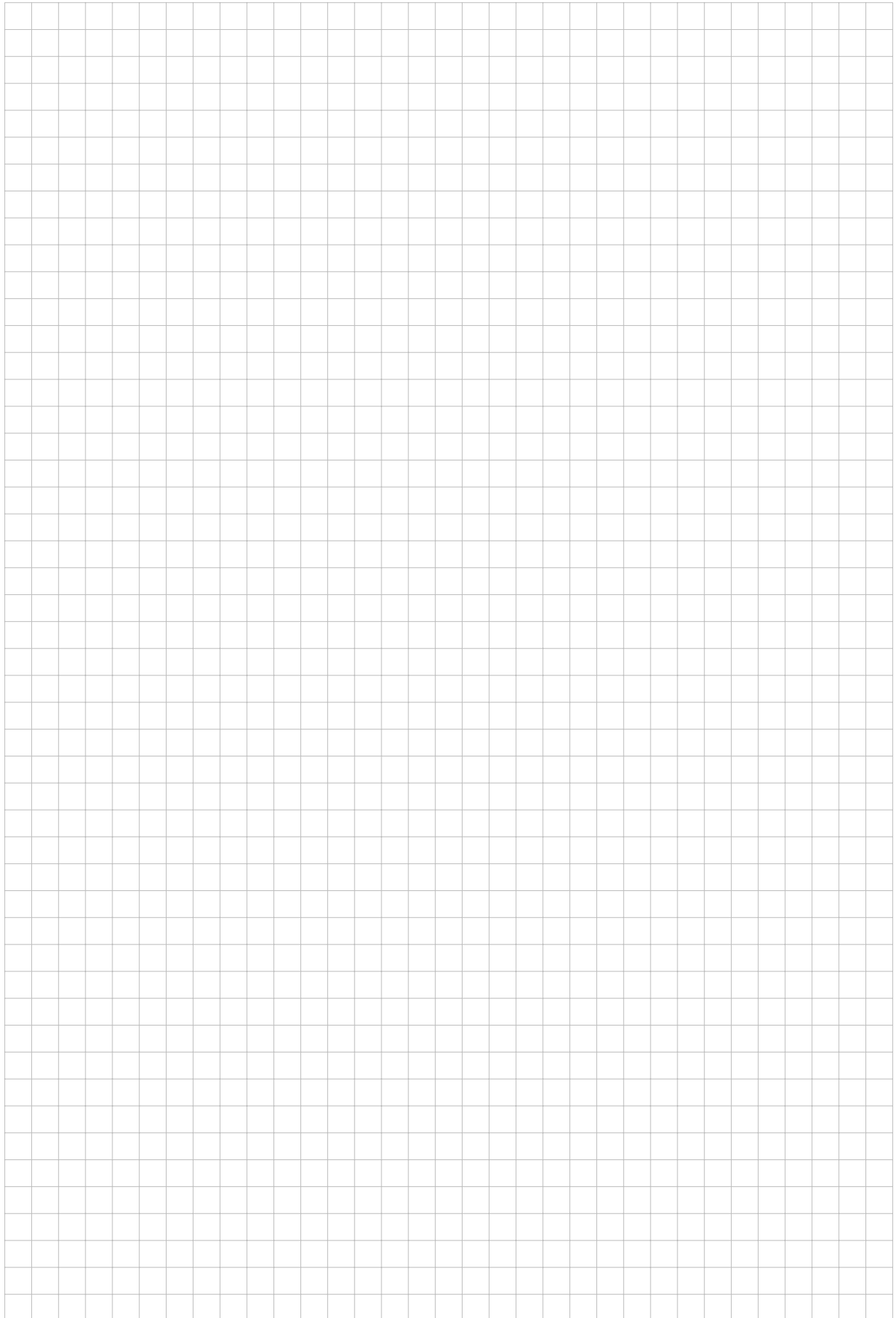
- (c) En déduire que

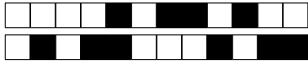
$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f \nu_3 ds.$$



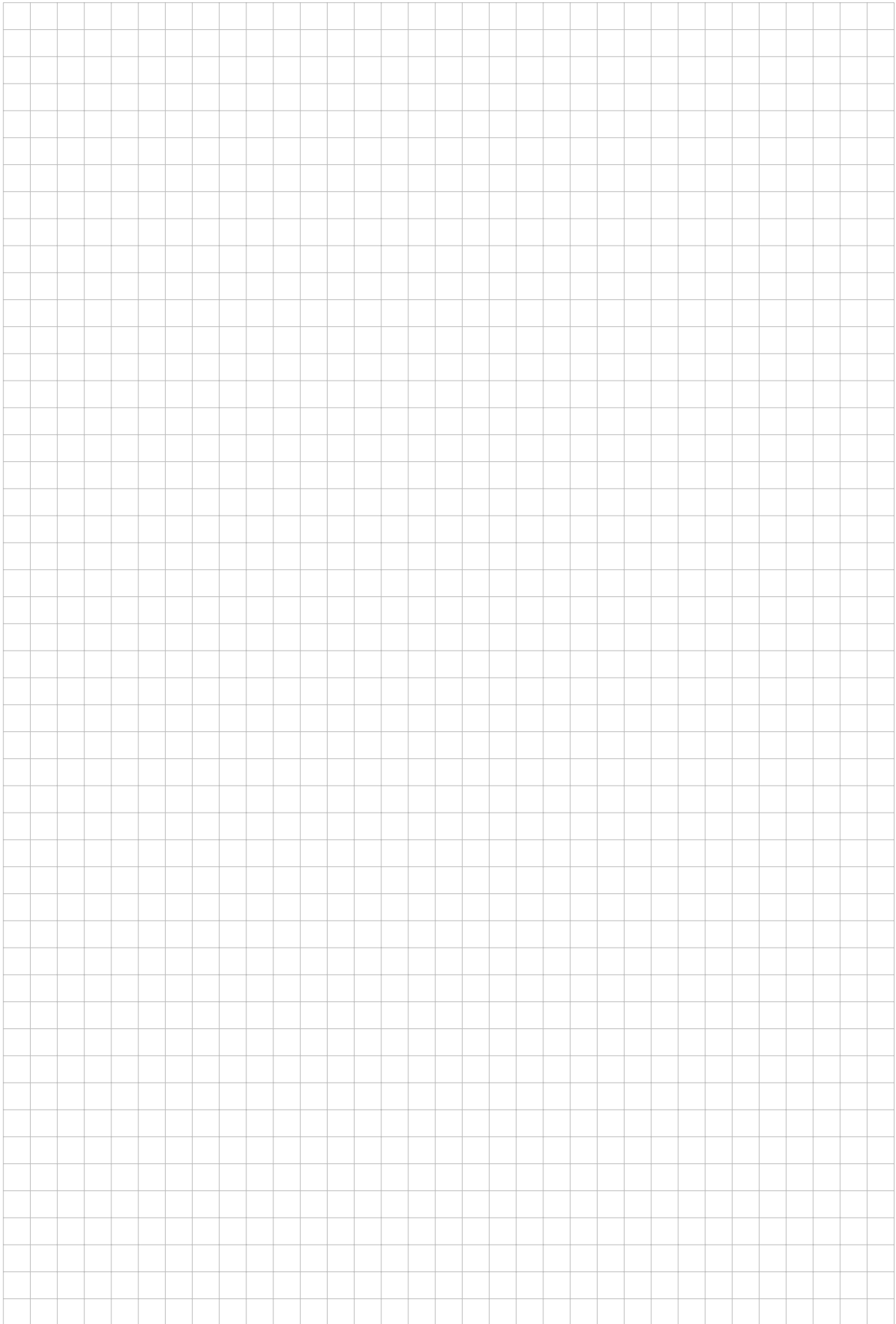


+180/21/12+



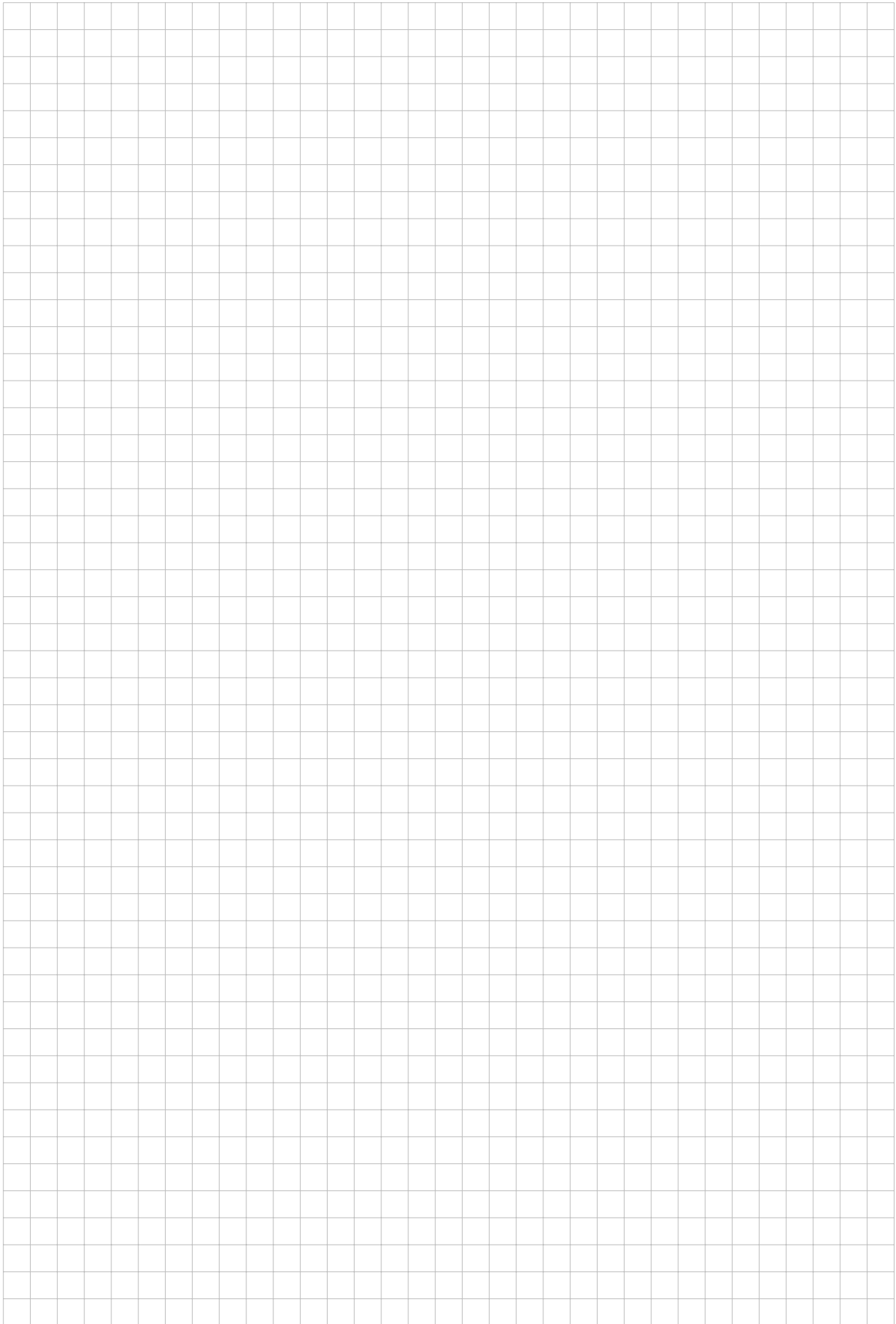


+180/22/11+

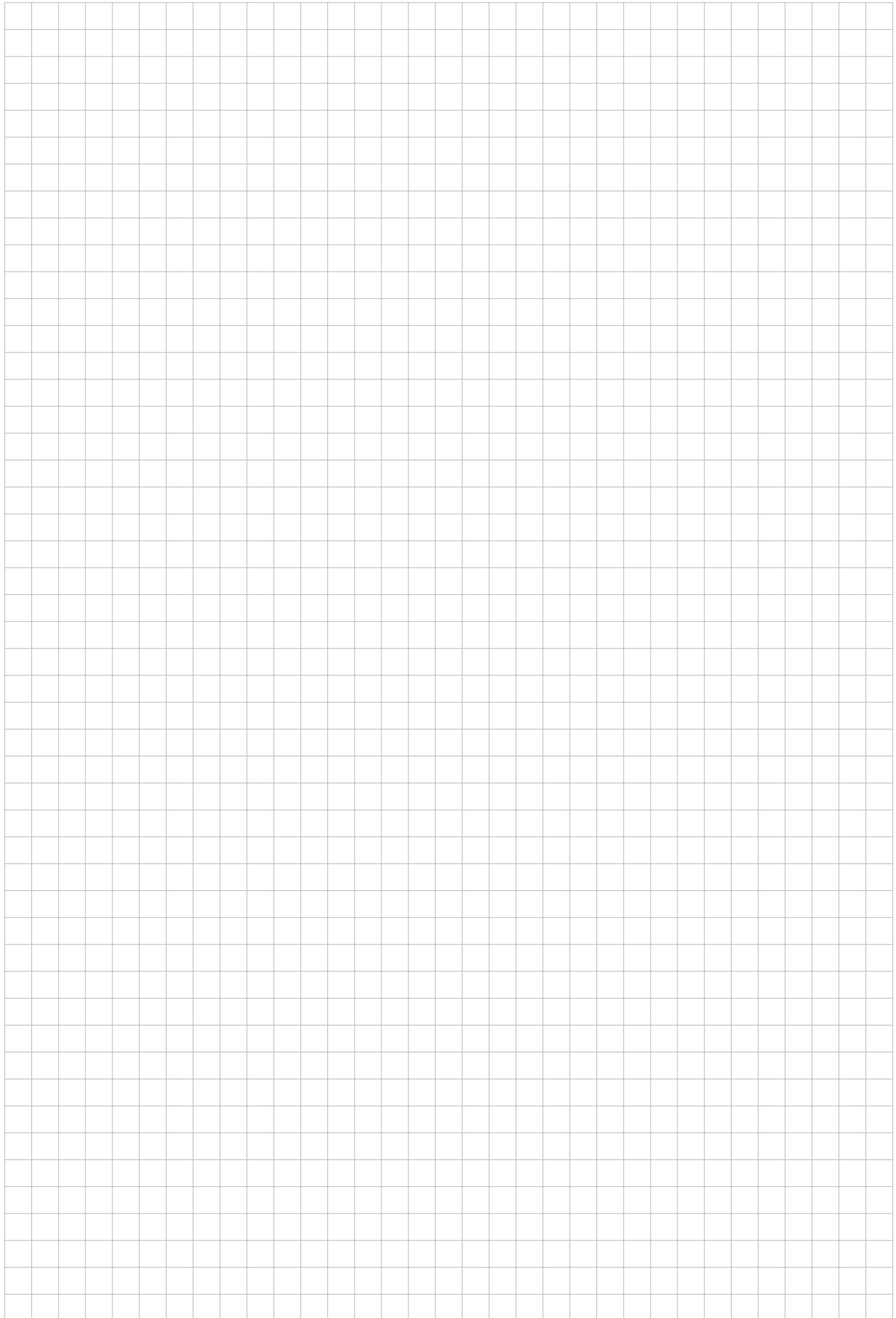
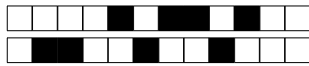


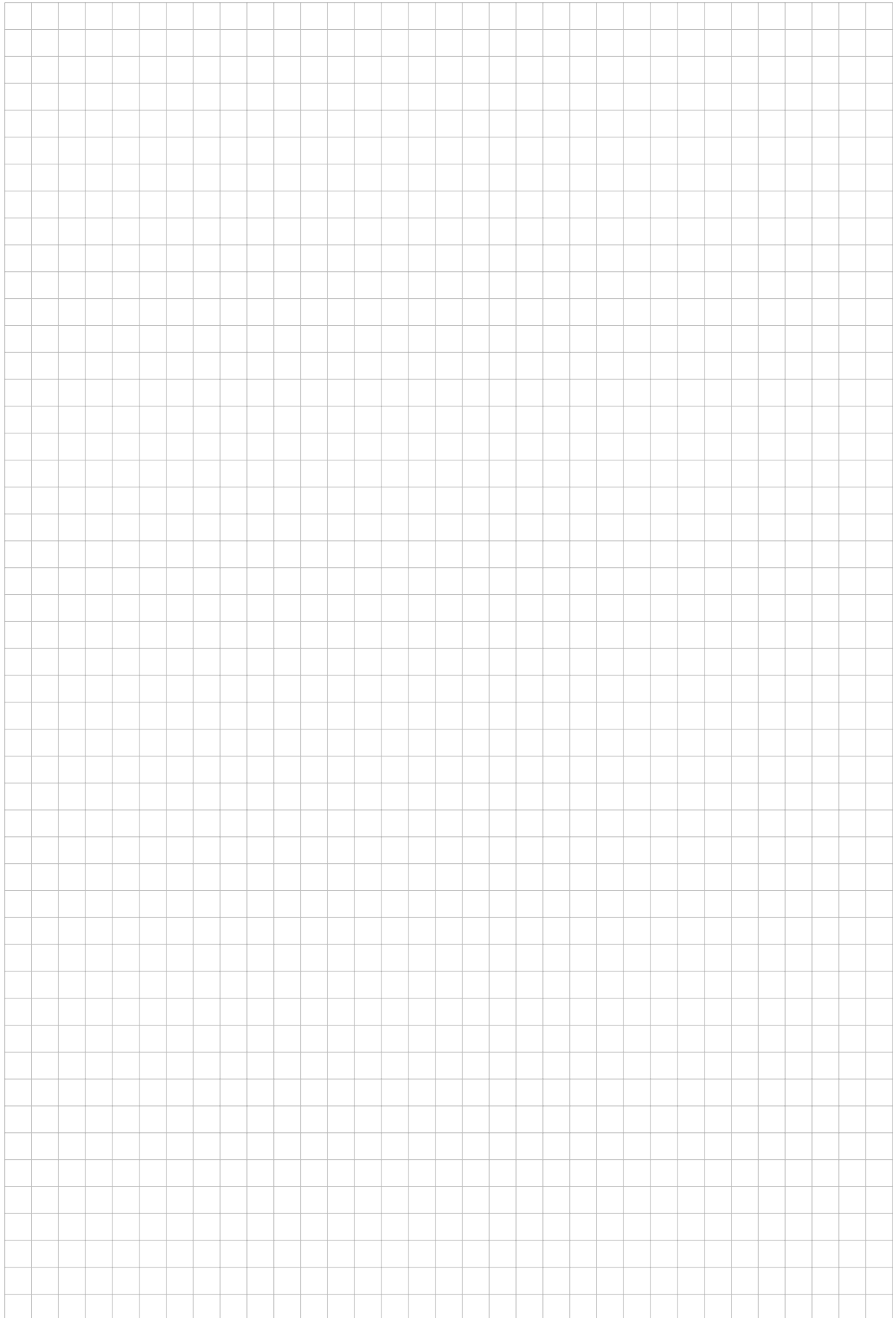
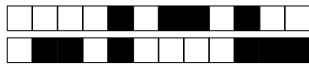


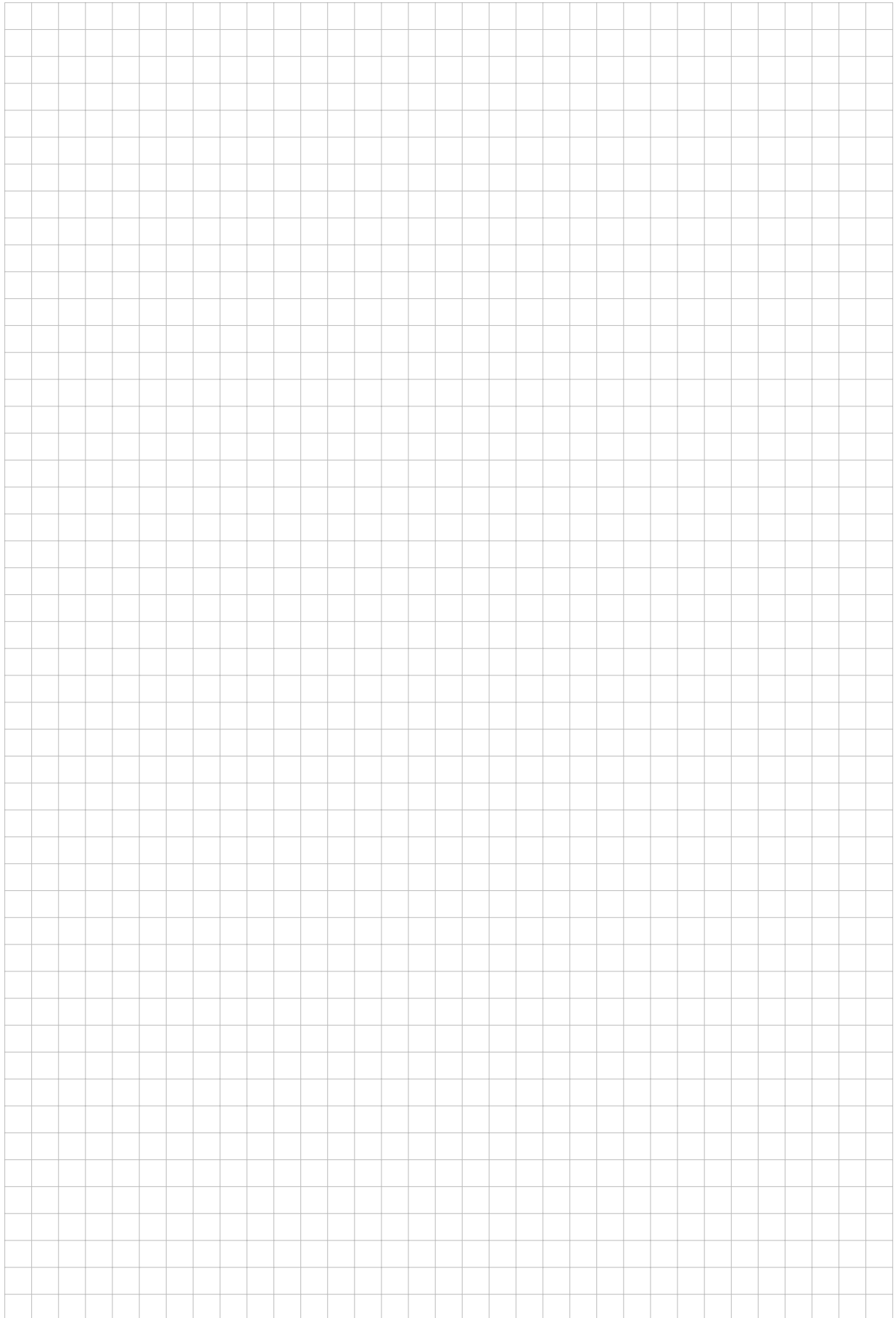
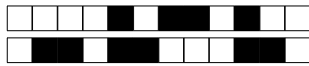
+180/23/10+

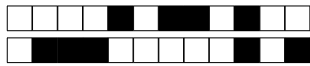




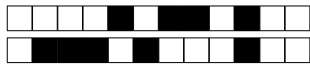




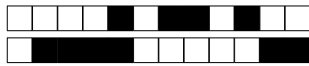




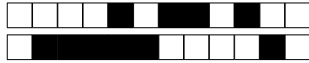
+180/28/5+



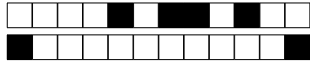
+180/29/4+



+180/30/3+



+180/31/2+



+180/32/1+