EPFL

Ens : Pr. Marco PICASSO
ANALYSE III - PH
14.01.2025
15:15-18:15

F6

FAKE 6

SCIPER : **666666** Salle : **AAC137**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 32 pages, les dernières pouvant être vides.
Ne pas dégrafer.
Il y a 14 points pour des questions à choix multiples et 17 points pour des questions ouvertes.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une calculatrice et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à choix multiples, on comptera :
  - $+1/N$ point si vous cochez une réponse correcte, où N est le nombre de réponses correctes;
  - 0 point si vous ne cochez rien;
  - $-1/M$ point si vous cochez une réponse incorrecte, où M est le nombre de réponses incorrectes.
- Deuxième partie : pour les questions ouvertes, le nombre de points maximum est noté au-dessus de chaque question. Laissez les cases à cocher vides !
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la/les case(s) correspondant à la/aux réponse(s) correcte(s) sans faire de ratures.

Question 1 Soit $\Sigma = (0,1)^2$ le carré unité. On note $\partial\Sigma$ le bord de Σ. Soit $\vec{v}(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a :

- ☐ $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 0.$
- ☐ $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2.$
- ☐ $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 3.$
- ☐ $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 1.$

Question 2 Pour $r > 1$, soit $C_r = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = r, \ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ le demi-cercle de rayon r. Soit encore $z_k = \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{4} + (k-1)\frac{\pi}{2}\right)\right\}$, $k = 1, 2, 3, 4$. On a :

$$\int_{-r}^{r} \frac{dx}{1+x^4} + \int_{C_r} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \lim_{z \to z_k} \frac{z - z_k}{1+z^4},$$

où

- ☐ $m = 3$.
- ☐ $m = 2$.
- ☐ $m = 4$.
- ☐ $m = 1$.

Question 3 On a

$$\left| \int_{C_r} \frac{dz}{1+z^4} \right| \leq C \frac{r}{r^4 - 1},$$

avec

- ☐ $C = \pi$.
- ☐ $C = \frac{\pi}{2}$.
- ☐ $C = 1$.

Question 4 Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1. On a $\int_\gamma f(z)dz = 0$ lorsque f est définie par :

- ☐ $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)^2}$.
- ☐ $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$.
- ☐ $f(z) = \dfrac{1}{z+2}$.
- ☐ $f(z) = \dfrac{1}{z}$.
- ☐ $f(z) = \log(z+2)$.

Question 5 Soit $0 < r < R$ et soit Γ la courbe simple, fermée et régulière par morceaux définie par $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, où

$$\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R} : \ r \leq x \leq R\} \qquad \Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = R, \ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$
$$\Gamma_3 = \{x \in \mathbb{R} : \ -R \leq x \leq -r\} \qquad \Gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = r, \ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

.

On a :

- ☐ $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z} dz = 0.$
- ☐ $\displaystyle\int_{\Gamma_2} \frac{1}{z} dz = R\pi i.$
- ☐ $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z} dz = \log\left(\frac{R}{r}\right).$

Question 6 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier de normale extérieure unité $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3 \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $f : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. On note $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$. On a

- ☐ $\displaystyle\iiint_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\vec{F} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} (\vec{\nu} \wedge \vec{F}) ds.$
- ☐ $\displaystyle\iiint_\Omega \partial_i f dx_1 dx_2 dx_3 = -\iint_{\partial\Omega} f \nu_i ds,\ i = 1, 2, 3.$
- ☐ $\displaystyle\iiint_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\vec{F} dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_\Omega (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) dx_1 dx_2 dx_3.$

Question 7 Soit $\Omega = (0,1)^3$ le cube unité. On note $\partial\Omega$ le bord de Ω et $\vec{\nu}$ la normale extérieure unité. Soit $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

- ☐ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nu} ds = 2.$
- ☐ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nu} ds = 3.$
- ☐ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nu} ds = 0.$
- ☐ $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nu} ds = 1.$

Question 8 Soit $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$. On pose $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$. On a :

- ☐ Si $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $1 - 2\alpha u + 2\beta v = 0$.
- ☐ Si $\alpha x + \beta y = 0$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha u - \beta v = 0$.
- ☐ Si $\alpha x + \beta y = \frac{\gamma}{2}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(u - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \left(v - \frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2}$.
- ☐ $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$.

Question 9 Soit $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^3}$. On a :

- ☐ $\mathrm{Res}_0(f) = -1$.
- ☐ $\mathrm{Res}_0(f) = 1$.
- ☐ $\mathrm{Res}_0(f) = 0$.

Question 10 Soit $k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$. On suppose que pour tout domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ régulier, de bord $\partial\Omega$ et de normale extérieure unité $\vec{\nu}$ on a

$$\iint_{\partial\Omega} -k\nabla T \cdot \vec{\nu} ds = \iiint_{\Omega} f dx_1 dx_2 dx_3.$$

On en déduit que dans $\mathbb{R}^3$, on a :

- ☐ $-k\Delta T = f$.
- ☐ $-k\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}\right) = f$.
- ☐ $-\mathrm{div}(k\nabla T) = f$.
- ☐ $-\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(k\dfrac{\partial T}{\partial x_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(k\dfrac{\partial T}{\partial x_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(k\dfrac{\partial T}{\partial x_3}\right)\right) = f$.

Question 11 Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. On cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1,x_2) + \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 1 & \text{dans } \Omega \\ u(x_1,x_2) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Soit

$$V = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R},\ \iint_\Omega v^2 dx_1 dx_2 < +\infty,\ \iint_\Omega ||\nabla v||^2\ dx_1 dx_2 < +\infty,\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

On a :

- ☐ $\displaystyle\iint_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla v - \frac{\partial u}{\partial x_1} v \right)\ dx_1 dx_2 = \iint_\Omega v dx_1 dx_2 \quad \forall v \in V.$
- ☐ $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1} v\ dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall v \in V.$
- ☐ Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1), alors $\displaystyle\iint_\Omega ||\nabla(u_1 - u_2)||^2\ dx_1 dx_2 = 0.$
- ☐ La solution de (1), si elle existe, est unique.
- ☐ $\displaystyle\iint_\Omega ||\nabla u||^2\ dx_1 dx_2 = \iint_\Omega u\ dx_1 dx_2.$

Question 12 Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N \in V$ des fonctions linéairement indépendantes. La méthode de Galerkin correspondant à (1) est équivalente à résoudre le système linéaire $A\vec{u} = \vec{f}$, où $\vec{u}, \vec{f} \in \mathbb{R}^N$ et $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. On a :

- ☐ $\displaystyle A_{ij} = \iint_\Omega (\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\varphi_i)\ dx_1 dx_2$
- ☐ $\displaystyle A_{ij} = \iint_\Omega (\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\varphi_j)\ dx_1 dx_2$
- ☐ $\displaystyle f_i = \iint_\Omega \varphi_i(x_1,x_2)\ dx_1 dx_2.$
- ☐ $\displaystyle A_{ij} = \iint_\Omega (\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\varphi_j)\ dx_1 dx_2$
- ☐ $\displaystyle A_{ij} = \iint_\Omega (\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\varphi_i)\ dx_1 dx_2$

Question 13 Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1. On a :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \alpha \int_\gamma \frac{dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i},$$

où

- ☐ $\alpha = 1.$
- ☐ $\alpha = 4.$
- ☐ $\alpha = 2.$

Question 14 On admet que le polynôme $(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i$ admet $2 - i$ et $\dfrac{2-i}{5}$ comme racines. On a :

$$\int_\gamma \frac{dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i} = \frac{\pi}{\beta},$$

où

- ☐ $\beta = 1.$
- ☐ $\beta = 2.$
- ☐ $\beta = 4.$

Deuxième partie, questions ouvertes

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 15: *Cette question est notée sur 2 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2

Soit $a, b > 0$ donnés et

$$\Sigma = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1,\ x_3 = 0 \right\}.$$

Calculer l'aire de Σ.

Question 16: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0 ☐ .5 ☐ 1 ☐ .5 ☐ 2 ☐ .5 ☐ 3 ☐ .5 ☐ 4 ☐ .5 ☐ 5

Vérifier le théorème de Stokes pour

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \ x_3 \geq 0\}$$
$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, -x_2 x_3^2, -x_2^2 x_3).$$

Question 17: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et simplement connexe, $\varphi : D \to \mathbb{R}^2 \in \mathcal{C}^1(D)$ telle que $\varphi(x_1, x_2) > 0$ pour tout $(x_1, x_2) \in D$, $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ (x_1, x_2) \in D, \ 0 < x_3 < \varphi(x_1, x_2)\}$ et $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ la normale extérieure unité à $\partial\Omega$. On notera $\partial\Omega = D \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, où $\nu_3 = 0$ sur Σ_2.

(a) Sur un dessin, représenter $\Omega, \Sigma_1, \Sigma_2$ et $\vec{\nu}$.

(b) Montrer que

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_D \left(f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) - f(x_1, x_2, 0)\right) dx_1 dx_2.$$

(c) En déduire que

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f \nu_3 ds.$$

+180/22/11+

Question 18: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ 0 ☐ .5 ☐ 1 ☐ .5 ☐ 2 ☐ .5 ☐ 3 ☐ .5 ☐ 4 ☐ .5 ☐ 5

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2$. Pour $z = x + iy$, on note $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, où $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Montrer que

- f est holomorphe dans $\mathbb{C}$,
- $\Delta\phi = 0$,
- $\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$.

(b) On pose $\vec{u} = \nabla\phi = (u, v)$. Représenter dans $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0\}$

- les lignes $\phi = cste$, $\psi = cste$,
- le champ $\vec{u}$.

(c) Expliciter les trajectoires, i.e. les lignes $x(t)$ et $y(t)$ telles que $x'(t) = u(x(t), y(t))$ et $y'(t) = v(x(t), y(t))$.

(d) Montrer que si $x(0) > 0$ et $y(0) = 0$, alors

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty \quad \text{et} \quad y(t) = 0.$$

(e) Montrer que si $x(0) = 0$ et $y(0) > 0$, alors

$$x(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

+180/25/8+

+180/27/6+