

Exercice 1.

c.f. livre.

Exercice 2.

c.f. livre.

Exercice 3.

c.f. livre.

Exercice 4.

c.f. livre.

Exercice 5.

c.f. livre.

Exercice 6.

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n-1)}(z_0 + h) - f^{(n-1)}(z_0)}{h} &= \frac{(n-1)! \int_{\gamma} \left(\frac{f(z)}{(z - (z_0 + h))^n} - \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} \right) dz}{2\pi i} \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{h} \frac{(z - z_0)^n - (z - (z_0 + h))^n}{(z - (z_0 + h))^n (z - z_0)^n} dz \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{h}{h} \frac{(z - z_0)^{n-1} + \dots + (z - (z_0 + h))^{n-1}}{(z - (z_0 + h))^n (z - z_0)^n} dz, \end{aligned}$$

où on a utilisé $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ pour la dernière égalité.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(z_0 + h) - f^{(n-1)}(z_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{(z - z_0)^{n-1} + \dots + (z - (z_0 + h))^{n-1}}{(z - (z_0 + h))^n (z - z_0)^n} dz \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que la fonction $(z, h) \mapsto \frac{(z - z_0)^{n-1} + \dots + (z - (z_0 + h))^{n-1}}{(z - (z_0 + h))^n (z - z_0)^n}$ était continue, et donc uniformément continue sur un compact, ce qui nous permet de permuter limite et intégrale.

Noter que, par le corollaire du théorème de Cauchy, le valeur de

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

ne dépend pas du choix de la courbe γ . On conclut donc que, pour toute courbe simple fermée et régulière $\gamma \subset D$, on a

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Exercice 7.

On montre par récurrence que

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} (n-1)! z^{-n} \quad \forall n \geq 1.$$

Ainsi, pour tout z_0 tel que $B_R(z_0) \subset D$ et tout $z \in B_R(z_0)$,

$$\log(z) = \log(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z_0^{-n} (z - z_0)^n.$$