

Exercice 1.

c.f. livre.

Exercice 2.

c.f. livre.

Exercice 3.

c.f. livre.

Exercice 4.

c.f. livre.

Exercice 5.

Comme dans l'exercice 9.6 du livre, on écrit $f = u + iv$. On a donc $|f|^2 = u^2 + v^2$. On applique le Laplacien pour obtenir

$$\Delta(|f|^2) = 2u\Delta u + 2|\vec{\nabla}u|^2 + 2v\Delta v + 2|\vec{\nabla}v|^2.$$

Par l'exercice 9.6 du livre, $\Delta u = \Delta v = 0$, et par les relations de Cauchy-Riemann, $|\vec{\nabla}u|^2 = |\vec{\nabla}v|^2 = |f'|^2$, d'où

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2.$$

Exercice 6.

- Puisque F est holomorphe, on a, pour $z = x + iy$

$$F'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F'(z) dz &= \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t)) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t)) \right) \cdot (\alpha'(t) + i\beta'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t))\alpha'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha(t), \beta(t))\beta'(t) \right) dt \\ &\quad + i \int_a^b \left(\frac{\partial v}{\partial y}(\alpha(t), \beta(t))\beta'(t) + \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t))\alpha'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt}(u(\alpha(t), \beta(t))) \right) dt + i \int_a^b \left(\frac{d}{dt}(v(\alpha(t), \beta(t))) \right) dt \\ &= u(\alpha(b), \beta(b)) + iv(\alpha(b), \beta(b)) - u(\alpha(a), \beta(a)) - iv(\alpha(a), \beta(a)) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

- On pose $D = \mathbb{C}$ et $F(z) = \frac{z^3}{3}$. Puisque γ est fermée, on a $\gamma(a) = \gamma(b)$ et donc, par le point précédent,

$$\int_{\gamma} z^2 = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

Noter qu'on aurait également pu appliquer le théorème de Cauchy et aboutir à la même conclusion.