Exercice 1.

On a

$$f(x) = \int_0^1 F_1(tx)x_1 + F_2(tx)x_2 + F_3(tx)x_3 \, dt,$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \int_0^1 tx_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(tx) + tx_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(tx) + tx_3 \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(tx) + F_1(tx) \, dt.$$

De plus, puisque $\overrightarrow{\text{rot}}(F) = 0$,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) &= \int_0^1 tx_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(tx) + tx_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(tx) + tx_3 \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(tx) + F_1(tx) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(tF_1(tx)\right) \, dt \\ &= F_1(x).\end{aligned}$$

On montre de manière similaire que

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = F_2(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = F_3(x).$$

Exercice 2.
On a

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma f ds &= \int_0^1 du \int_0^1 dv \; f(\sigma(u,v)) || \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) || \\ &= \sum_{i,j=0}^{N-1} \int_{u_i}^{u_i + \frac{1}{N}} du \int_{v_j}^{v_j + \frac{1}{N}} dv \; f(\sigma(u,v)) || \overrightarrow{Q_1 Q_2} \wedge \overrightarrow{Q_1 Q_3} || \\ &= \sum_{i,j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \frac{1}{N} f(P_{i+1/2,j+1/2}) || \overrightarrow{Q_1 Q_2} \wedge \overrightarrow{Q_1 Q_3} || \\ &= \sum_{i,j=0}^{N-1} f(P_{i+1/2,j+1/2}) \underbrace{|| \overrightarrow{P_{i,j} P_{i+1,j}} \wedge \overrightarrow{P_{i,j} P_{i,j+1}} ||}_{\text{aire du petit parallélogramme}}.\end{aligned}$$

Exercice 3.
Il suffit d'appliquer le théorème de la divergence sur le membre de gauche de l'équation donnée.

$$\iint_{\partial\Omega} -k \, \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \vec{\nu} \text{d}s = - \iiint_\Omega \text{div}(k \, \overrightarrow{\text{grad}} T) \text{d}V = \iiint_\Omega f \text{d}V.$$

Cette formule étant valable pour tout domaine Ω, on en déduit directement que

$$-\,\text{div}(k \, \overrightarrow{\text{grad}} T) = f,$$

soit

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_3}\right) \right) = f.$$

Les autres propositions sont fausses car k dépend de x_1, x_2, x_3.

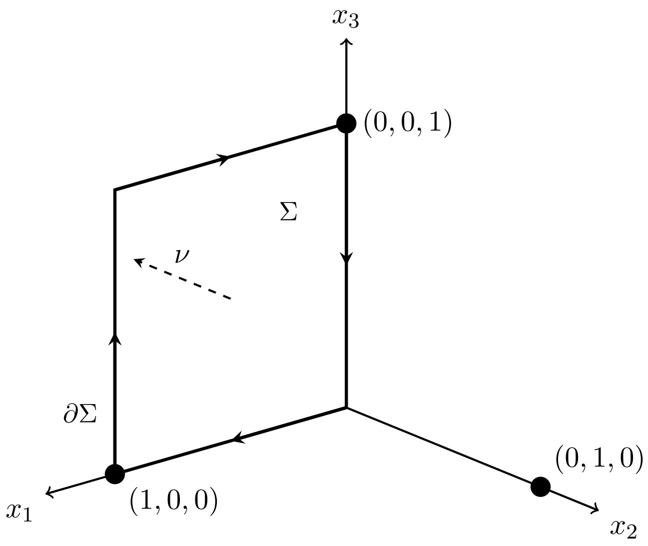

Figure 1: Surface Σ et orientation du bord $\partial\Sigma$.

Exercice 4.
On paramétrise Σ par

$$\vec{\sigma}(x_1, x_3) = (x_1, 0, x_3), \quad (x_1, x_3) \in [0,1]^2,$$

ce qui donne un vecteur normal

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial x_3} = (0, -1, 0).$$

L'orientation du bord $\partial\Sigma$ est donné par la figure 1. On calcule d'abord

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} &= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_3 \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x_1, 0, x_3) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x_1, 0, x_3) \right) (-1) \\ &= \int_0^1 (-F_1(x_1, 0, 1) + F_1(x_1, 0, 0))\mathrm{d}x_1 + \int_0^1 (F_3(1, 0, x_3) - F_3(0, 0, x_3))\mathrm{d}x_3\end{aligned}$$

D'autre part, $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

- Pour Γ_1, on pose $\vec{\gamma}_1(t) = (t, 0, 0)$ qui va de $(0,0,0)$ à $(1,0,0)$ pour $t \in [0,1]$. On a alors $\vec{\gamma}_1'(t) = (1,0,0)$ et $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_0^1 F_1(t,0,0)\mathrm{d}t$.
- Pour Γ_2, $\vec{\gamma}_2(t) = (1, 0, t)$, avec $t \in [0,1]$. Ainsi $\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_0^1 F_3(1,0,t)\mathrm{d}t$.
- De même, $\int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\int_0^1 F_1(t,0,1)\mathrm{d}t$ et $\int_{\Gamma_4} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\int_0^1 F_3(0,0,t)\mathrm{d}t$.

On a bien vérifié que

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}.$$

Exercice 5.
Puisque f est continue en z_0, on a que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que si $|z - z_0| < \delta(\epsilon)$ alors $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. En particulier, il existe $\tilde{\delta}$ tel que $|f(z)| < |f(z_0)| + 1$ pour tout z tel que $|z - z_0| < \tilde{\delta}$.
Similairement, puisque g est continue en z_0, on a que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\gamma(\epsilon) > 0$ tel que si

$|z - z_0| < \gamma(\epsilon)$ alors $|g(z) - g(z_0)| < \epsilon$.
Soit $\epsilon > 0$ fixé. On a

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| &= |f(z)(g(z) - g(z_0)) + g(z_0)(f(z) - f(z_0))| \\ &\leq |f(z)||g(z) - g(z_0)| + |g(z_0)||f(z) - f(z_0)| \end{aligned}$$

Puisque f, g sont continues en z_0, il existe

- $\delta_1 > 0$ tel que si $|z - z_0| < \delta_1$, alors $|f(z) - f(z_0)| < 1$, et donc $|f(z)| < |f(z_0)| + 1$;
- $\delta_2 > 0$ tel que si $|z - z_0| < \delta_2$, alors $|f(z) - f(z_0)| < \dfrac{\epsilon}{2|g(z_0)| + 1}$;
- $\delta_3 > 0$ tel que si $|z - z_0| < \delta_3$, alors $|g(z) - g(z_0)| < \dfrac{\epsilon}{2|f(z_0)| + 2}$.

Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Pour tout z tel que $|z - z_0| < \delta$, on obtient

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| &< (|f(z_0)| + 1)\frac{\epsilon}{2|f(z_0)| + 2} + |g(z_0)|\frac{\epsilon}{2|g(z_0)| + 1} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Exercice 6.

- Supposons tout d'abord que $f = u + iv$ est continue en $z_0 = x_0 + iy_0$ et montrons que u et v sont continues en (x_0, y_0).
  Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue, $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tel que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. En réécrivant $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ et en notant que $||(x, y) - (x_0, y_0)|| = |z - z_0|$, on obtient, $\forall (x, y) : ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \delta$,

  $$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| \leq |u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)| = |f(z) - f(z_0)| < \epsilon,$$

  et donc u est continue. De la même facon, on montre que v est continue.

- Supposons maintenant que u et v sont continues en (x_0, y_0) et montrons que f est continue en $z_0 = x_0 + iy_0$.
  Soit $\epsilon > 0$. Puisque u et v sont continues en (x_0, y_0), il existe $\delta > 0$ tel que

  $$||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \delta \Rightarrow |u(x, y) - u(x_0, y_0)|, |v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}.$$

  Pour tout z tel que $|z - z_0| = |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| < \delta$, on a alors:

  $$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)| \\ &= \sqrt{(u(x, y) - u(x_0, y_0))^2 + (v(x, y) - v(x_0, y_0))^2} \\ &< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

  et donc f est continue.

Exercice 7.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(z_0+h)-(fg)(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(z_0+h)-f(z_0+h)g(z_0)+f(z_0+h)g(z_0)-(fg)(z_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} f(z_0+h)\frac{g(z_0+h)-g(z_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}g(z_0)\\ &= f(z_0)g'(z_0)+f'(z_0)g(z_0).\end{aligned}$$

(Notez qu'on a utilisé le fait que, puisque f est holomorphe en z_0, elle est continue en z_0.)

Exercice 8.
c.f. livre.