EPFL – Automne 2025	Pr. M. Picasso
Analyse III – PH	**Corrigé**
Série 6	16 octobre 2025

Exercice 1.
L'affirmation 4. est fausse. Toutes les autres sont correctes.

Exercice 2.
c.f. livre

Exercice 3.
c.f. livre

Exercice 4.

1. Partout ailleurs qu'en $(0,0,0)$, il est facile de vérifier que $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} = \vec{0}$, ce qui donne $\iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\text{d}s} = 0$, comme $(0,0,0)$ n'est pas un point de Σ.

2. On commence par caractériser le bord de Σ. Formellement, on utilise les valeurs extrêmes de u dans la paramétrisation de la surface:
$$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$
$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{\vec{\gamma}_1(v), v \in [0,2\pi]\},\\ \Gamma_2 &= \{\vec{\gamma}_2(v), v \in [0,2\pi]\},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_1(v) &= \left(\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\cos v, \left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\sin v, \frac{1}{2}\sin\frac{v}{2}\right),\\ \vec{\gamma}_2(v) &= \left(\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\cos v, \left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\sin v, -\frac{1}{2}\sin\frac{v}{2}\right).\end{aligned}$$
On remarque que les extrémités des Γ_1 et Γ_2 se rejoignent, car
$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_1(2\pi) &= (1/2,0,0) = \vec{\gamma}_2(0),\\ \vec{\gamma}_2(2\pi) &= (3/2,0,0) = \vec{\gamma}_1(0).\end{aligned}$$
On cherche donc une unique paramétrisation de $\partial\Sigma$. Dans la définition de Γ_2, on effectue le changement de variable $v' = 2\pi + v$, soit $v = v' - 2\pi$. Les formules usuelles de trigonométrie donnent
$$\begin{aligned}\cos\frac{v}{2} &= \cos\left(\frac{v'}{2} - \pi\right) = -\cos\frac{v'}{2},\\ \sin\frac{v}{2} &= \sin\left(\frac{v'}{2} - \pi\right) = -\sin\frac{v'}{2},\\ \cos v &= \cos(v'-2\pi) = \cos v',\\ \sin v &= \sin(v'-2\pi) = \sin v',\end{aligned}$$
de sorte que
$$\begin{aligned}\Gamma_2 =&\{\vec{\gamma}_2(v), v \in [0,2\pi]\}\\ =&\{\vec{\gamma}_2(v'-2\pi), v' \in [2\pi,4\pi]\}\\ =&\left\{\left(\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{v'}{2}\right)\cos v', \left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{v'}{2}\right)\sin v', \frac{1}{2}\sin\frac{v'}{2}\right), v' \in [2\pi,4\pi]\}\right\}\\ =&\{\vec{\gamma}_1(v'), v' \in [2\pi,4\pi]\}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\partial\Sigma =&\{\vec{\gamma}_1(v), v\in[0,2\pi]\}\cup\{\vec{\gamma}_2(v), v\in[0,2\pi]\}\\ =&\{\vec{\gamma}_1(v), v\in[0,2\pi]\}\cup\{\vec{\gamma}_1(v'), v'\in[2\pi,4\pi]\}\\ =&\{\vec{\gamma}_1(v), v\in[0,4\pi]\}.\end{aligned}$$

Grâce à cette paramétrisation de $\partial\Sigma$, nous pouvons écrire

$$\int_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}=\int_0^{4\pi}\vec{F}(\vec{\gamma}_1(v))\cdot\vec{\gamma}_1'(v)\mathrm{d}v.$$

Calculons les termes intervenant dans l'intégrale. Pour $v\in[0,4\pi]$,

$$\vec{F}(\vec{\gamma}_1(v))=\left(-\frac{\sin v}{1+\frac{1}{2}\cos v},\frac{\cos v}{1+\frac{1}{2}\cos v},0\right),$$

et

$$\vec{\gamma}_1'(v)=\left(-\frac{1}{4}\sin\frac{v}{2}\cos v-\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\sin v,-\frac{1}{4}\sin\frac{v}{2}\sin v+\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\cos v,\frac{1}{4}\cos\frac{v}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\vec{F}(\vec{\gamma}_1(v))\cdot\vec{\gamma}_1'(v)=\frac{1}{4}\frac{\sin\frac{v}{2}\cos v\sin v}{1+\frac{1}{2}\cos v}+\sin^2 v-\frac{1}{4}\frac{\sin\frac{v}{2}\cos v\sin v}{1+\frac{1}{2}\cos v}+\cos^2 v=1.$$

Nous pouvons donc conclure

$$\int_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}=\int_0^{4\pi}1\mathrm{d}v=4\pi.$$

3. Le théorème de Stokes ne s'applique pas car Σ n'est pas orientable. Pour s'en convaincre, on calcule la normale à la surface en tout point $u\in[-1,1], v\in[0,2\pi]$.

$$\vec{\nu}(u,v)=\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}.$$

D'une part,

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial u}=\left(\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\cos v,\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\sin v,\frac{1}{2}\sin\frac{v}{2}\right),$$

et d'autre part,

$$\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial v}=\left(-\frac{u}{4}\sin\frac{v}{2}\cos v-\left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\sin v,-\frac{u}{4}\sin\frac{v}{2}\sin v+\left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\cos v,\frac{u}{4}\cos\frac{v}{2}\right),$$

alors le calcul du produit vecotriel donne

$$\begin{aligned}\vec{\nu}(u,v)=\Bigg(&\frac{1}{2}\sin\frac{v}{2}\left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\cos v-\frac{u}{8}\sin v,\\ &\frac{1}{2}\sin\frac{v}{2}\left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\sin v+\frac{u}{8}\cos v,\\ &-\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}\right)\Bigg).\end{aligned}$$

Si on évalue cette normale au point $\vec{\sigma}=(1,0,0)$ ce qui correspond à $(u,v)=(0,0)$ ou $(u,v)=(0,2\pi)$, on obtient

$$\begin{aligned}\vec{\nu}(0,0)&=(0,0,-1/2),\\ \vec{\nu}(0,2\pi)&=(0,0,1/2).\end{aligned}$$

La normale change de signe après un tour complet sur le ruban de Möbius, donc la surface n'est pas orientable et le théorème de Stokes ne s'applique pas.