Exercice 1.
c.f. livre

Exercice 2.
c.f. livre

Exercice 3.
c.f. livre

Exercice 4.
On numérote les faces du parallélépipède de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &:= \{(x_1, b_1, x_3) :\ a_1 \le x_1 \le a_2,\ c_1 \le x_3 \le c_2\};\\
\Sigma_2 &:= \{(x_1, x_2, c_2) :\ a_1 \le x_1 \le a_2,\ b_1 \le x_2 \le b_2\};\\
\Sigma_3 &:= \{(x_1, b_2, x_3) :\ a_1 \le x_1 \le a_2,\ c_1 \le x_3 \le c_2\};\\
\Sigma_4 &:= \{(x_1, x_2, c_1) :\ a_1 \le x_1 \le a_2,\ b_1 \le x_2 \le b_2\};\\
\Sigma_5 &:= \{(a_1, x_2, x_3) :\ b_1 \le x_2 \le b_2,\ c_1 \le x_3 \le c_2\};\\
\Sigma_6 &:= \{(a_2, x_2, x_3) :\ b_1 \le x_2 \le b_2,\ c_1 \le x_3 \le c_2\};
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{b_1}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)\\
&= \int_{c_1}^{c_2} dx_2 \int_{b_1}^{b_2} dx_2 \left(f(a_2, x_2, x_3) - f(a_1, x_2, x_3)\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, $\nu_1 = 0$ sur $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, $\nu_1 = -1$ sur Σ_5 et $\nu_1 = 1$ sur Σ_6. Donc

$$\iint_{\partial\Omega} f\nu_1 ds = \iint_{\Sigma_6} f ds - \iint_{\Sigma_5} f ds.$$

Paramétrisation de Σ_6:
$\sigma_6(u, v) = (a_2, u, v),\ b_1 \le u \le b_2,\ c_1 \le v \le c_2.$
On a alors $\dfrac{\partial \sigma_6}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma_6}{\partial v} = (0, 1, 0) \wedge (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$. (Noter que dans ce cas là, $\nu = \dfrac{\partial \sigma_6}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma_6}{\partial v}$.) D'où

$$\iint_{\Sigma_6} f ds = \int_{b_1}^{b_2} du \int_{c_1}^{c_2} dv f(a_2, u, v).$$

Paramétrisation de Σ_5:
$\sigma_5(u, v) = (a_1, u, v),\ b_1 \le u \le b_2,\ c_1 \le v \le c_2.$
On a alors $\dfrac{\partial \sigma_5}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma_5}{\partial v} = (0, 1, 0) \wedge (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$, et donc $\left\|\dfrac{\partial \sigma_5}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma_5}{\partial v}\right\| = 1$. (Noter que dans ce cas là, $\nu = -\dfrac{\partial \sigma_5}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma_5}{\partial v}$.) D'où

$$\iint_{\Sigma_5} f ds = \int_{b_1}^{b_2} du \int_{c_1}^{c_2} dv f(a_1, u, v).$$

Finalement, on conclut

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} f\nu_1 ds &= \iint_{\Sigma_6} f ds - \iint_{\Sigma_5} f ds\\
&= \int_{b_1}^{b_2} du \int_{c_1}^{c_2} dv f(a_2, u, v) - \int_{b_1}^{b_2} du \int_{c_1}^{c_2} dv f(a_1, u, v)\\
&= \iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.

Méthode 1 : à l'aide du théorème de la divergence

On commence par applique le théorème de la divergence

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{F} = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\mathrm{d}s.$$

Le bord de Ω est donné par

$$\begin{aligned}\partial\Omega =&\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3\cup\Sigma_4\\ =&\{x_1^2+x_2^2+x_3^2=4, x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0\}\\ &\cup\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 4, x_1=0, x_2\geq 0, x_3\geq 0\}\\ &\cup\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 4, x_1\geq 0, x_2=0, x_3\geq 0\}\\ &\cup\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 4, x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3=0\}\end{aligned}$$

Sur Σ_1, on utilise la paramétrisation (coordonnées sphériques)

$$\vec{\sigma}(\varphi,\theta) = (2\cos\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\varphi).$$

Les conditons sur x_i, $i=1,2,3$ se traduisent en conditions sur θ,φ. Tout d'abord,

$$x_3\geq 0 \Rightarrow \cos\varphi\geq 0\Rightarrow \varphi\in[0,\pi/2],$$

ainsi $\sin\varphi\geq 0$ et on obtient

$$\left.\begin{matrix}x_1\geq 0\Rightarrow\cos\theta\geq 0\\ x_2\geq 0\Rightarrow\sin\theta\geq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\theta\in[0,\pi/2].$$

La normale à Σ_1 est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{\nu}_1(\varphi,\theta) =&\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\varphi}\wedge\frac{\partial\vec{\sigma}}{\partial\theta}\\ =&(2\cos\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\cos\varphi, -2\sin\varphi)\wedge(-2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta\sin\varphi, 0)\\ =&2\sin\varphi(2\cos\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\varphi)\\ =&2\sin\varphi\vec{\sigma}(\varphi,\theta).\end{aligned}$$

De plus, $\vec{F}(\vec{\sigma}(\varphi,\theta)) = 16\vec{\sigma}(\varphi,\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} =&\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\ 16\vec{\sigma}(\varphi,\theta)\cdot 2\sin\varphi\vec{\sigma}(\varphi,\theta)\\ =&2\times 16\times 4\times\frac{\pi}{2}[-\cos\varphi]_0^{\pi/2} = 64\pi.\end{aligned}$$

Sur Σ_2, la normale vaut $\vec{\nu}_2 = (-1,0,0)$ (un schéma peut vous aider). Ainsi, comme $\vec{F}(\vec{x}) = |\vec{x}|^4\vec{x}$, $\vec{F}(\vec{x})\cdot\vec{\nu}_2 = -|\vec{x}|^4 x_1 = 0$ car $x_1=0$ sur Σ_2. Le même raisonnement sur Σ_3 et Σ_4 donne

$$\iint_{\Sigma_2\cup\Sigma_3\cup\Sigma_4}\vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0,$$

ce qui permet de conclure que

$$\iiint_\Omega\operatorname{div}\vec{F} = 64\pi.$$

Méthode 2 : Calcul direct

Après calcul, on trouve

$$\operatorname{div}\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = 7(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2$$

On évalue directement l'intégrale en coordonnées sphériques.

$$\iiint_\Omega\operatorname{div}\vec{F}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \underbrace{\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta}_{=\pi/2}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}_{=1}\underbrace{\int_0^2 7r^4\times r^2\mathrm{d}r}_{[r^7]_0^2=128} = 64\pi.$$