

**Exercice 1.**

c.f. livre

**Exercice 2.**

c.f. livre

**Exercice 3.**

c.f. livre

**Exercice 4.**

c.f. livre

**Exercice 5.**

Une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$  peut être paramétrée par

$$\sigma(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u) \quad u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi].$$

Un vecteur normal à  $\Sigma$  est donc

$$\begin{aligned} \partial_u \sigma \times \partial_v \sigma &= (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, -R \sin u) \wedge (-R \sin u \sin v, R \sin u \cos v, 0) \\ &= R^2 (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \sin u \cos u). \end{aligned}$$

Ce vecteur normal sur la sphère est bien dirigé vers l'extérieur et  $\|\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma\| = R^2 \sin(u)$ . La normale extérieure unité est donc donnée par

$$\nu = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} -p\nu_1 ds &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho g R \cos u \sin u \cos v R^2 \sin u dv du \\ &= \int_0^\pi \rho g R \cos u \sin u R^2 \sin u \int_0^{2\pi} \cos v dv du \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} -p\nu_2 ds &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho g R \cos u \sin u \sin v R^2 \sin u dv du \\ &= \int_0^\pi \rho g R \cos u \sin u R^2 \sin u \int_0^{2\pi} \sin v dv du \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} -p\nu_3 ds &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho g R \cos u \cos u R^2 \sin u dv du \\ &= \int_0^\pi 2\pi \rho g R^3 \cos^2 u \sin u du \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3 \rho g. \end{aligned}$$

D'où

$$F = \left( 0, 0, \frac{4\pi}{3} R^3 \rho g \right).$$

et comme  $\frac{4\pi}{3} R^3$  est le volume de la boule, on retrouve bien le théorème d'Archimède.

**Exercice 6.**

Tout d'abord, il est facile de vérifier que  $\vec{\text{rot}}\vec{F} = (0, 0, 2)$ . On adopte les notations de l'exemple 8.21 du livre. Pour  $i = 3, 4, 5, 6$ ,  $\vec{\text{rot}}\vec{F} \cdot \vec{\nu} = 0$  sur  $\Sigma_i$  (les vecteurs sont orthogonaux). Ensuite

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{\text{rot}}\vec{F} \cdot \vec{dS} = \int_0^1 \int_0^1 (0, 0, 2) \cdot (0, 0, -1) dx dy = -2$$

$$\iint_{\Sigma_2} \vec{\text{rot}}\vec{F} \cdot \vec{dS} = \int_0^1 \int_0^1 (0, 0, 2) \cdot (0, 0, 1) dx dy = 2$$

d'où  $\iint_{\Sigma} \vec{\text{rot}}\vec{F} \cdot \vec{dS} = 0$ .