

Exercice 1.

c.f. livre

Exercice 2.

Supposons que le problème admet deux solutions u et v . On pose alors $w = u - v$, qui vérifie

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x, y)\overrightarrow{\operatorname{grad}}(w(x, y))) &= 0 & (x, y) \in \Omega, \\ w(x, y) &= 0 & (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{div}(aw\overrightarrow{\operatorname{grad}}w) = \operatorname{div}(a\overrightarrow{\operatorname{grad}}w)w + a\overrightarrow{\operatorname{grad}}w \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}w$, on obtient, en intégrant sur Ω ,

$$\begin{aligned} 0 &= -\iint_{\Omega} \operatorname{div}(a\overrightarrow{\operatorname{grad}}w)w = -\iint_{\Omega} \operatorname{div}(aw\overrightarrow{\operatorname{grad}}w) + \iint_{\Omega} a|\overrightarrow{\operatorname{grad}}w|^2 \\ &= -\int_{\partial\Omega} a \underbrace{w}_{=0 \text{ sur } \partial\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}}w \cdot \vec{\nu} + \iint_{\Omega} a|\overrightarrow{\operatorname{grad}}w|^2 \\ &= \iint_{\Omega} a|\overrightarrow{\operatorname{grad}}w|^2. \end{aligned}$$

De $a|\overrightarrow{\operatorname{grad}}w|^2 \geq 0$, on déduit $a|\overrightarrow{\operatorname{grad}}w|^2 = 0$, et finalement $\overrightarrow{\operatorname{grad}}w = \vec{0}$. Ainsi w est constant, et comme $w = 0$ sur $\partial\Omega$, on conclut que $w = 0$ dans $\bar{\Omega}$.

Exercice 3.

Comme pour l'exercice 2., on suppose que le problème admet deux solutions, u et v , et on note $w = u - v$. On a alors

$$\begin{aligned} \Delta w - w &= 0 & (x, y) \in \Omega, \\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}(w(x, y)) \cdot \vec{\nu}(x, y) &= 0 & (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'identité de Green,

$$\iint_{\Omega} w\Delta w + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(w) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(w) = 0.$$

Puisque $w = \Delta w$, ceci permet de conclure que

$$\iint_{\Omega} w^2 = 0$$

et donc $w = 0$, comme voulu.

Exercice 4.

c.f. livre

Exercice 5.

Le point 1. est faux; les autres points sont justes.

Exercice 6.

On commence par écrire l'intégrale sur la surface:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \int_0^1 (f(x_1, 1-x_1) - f(x_1, 0)) dx_1.$$

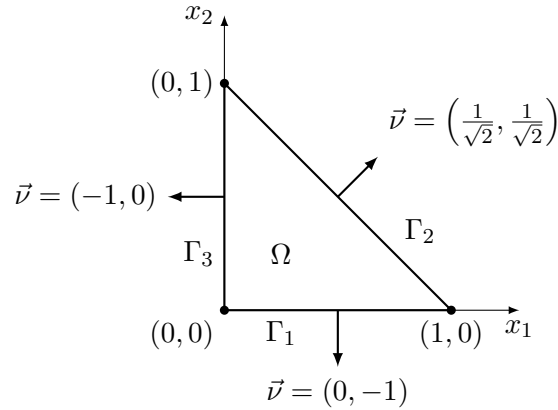
On décompose ensuite le bord du domain en trois (voir schéma ci-dessous) $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. On a alors

$$\int_{\partial\Omega} f\nu_2 dl = \int_{\Gamma_1} f\nu_2 dl + \int_{\Gamma_2} f\nu_2 dl + \int_{\Gamma_3} f\nu_2 dl.$$

Pour $i = 1, 2, 3$, on paramètre les courbes Γ_i par γ_i , avec

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t, 0), & t \in [0, 1], \\ \gamma_2(t) &= (1 - t, t), & t \in [0, 1], \\ \gamma_3(t) &= (0, 1 - t), & t \in [0, 1].\end{aligned}$$

Les normales correspondantes sont indiquées sur le schéma.



On a alors

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} f\nu_2 dl &= \int_0^1 f(t, 0) \times (-1) dt, \\ \int_{\Gamma_2} f\nu_2 dl &= \int_0^1 f(1 - t, t) \times (1/\sqrt{2}) \times \sqrt{2} dt, \\ \int_{\Gamma_3} f\nu_2 dl &= \int_0^1 f(0, t) \times 0 dt = 0.\end{aligned}$$

Dans la deuxième intégrale, on effectue le changement de variable $u = 1 - t$ ($du = -dt$), ce qui donne

$$\int_0^1 f(1 - t, t) dt = - \int_1^0 f(u, 1 - u) du = \int_0^1 f(t, 1 - t) dt.$$

Pour conclure,

$$\int_{\partial\Omega} f\nu_2 dl = \int_0^1 (f(t, 1 - t) - f(t, 0)) dt.$$