

Exercice 1.

1. Cas où $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0, y \geq 0\}$:

Paramétrisation de Γ :

$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, $t \in [0, \pi]$. Donc $\|\gamma'(t)\| = 1$.
D'où

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\int_0^\pi \rho(\cos(t), \sin(t), 0) dt}{\int_0^\pi \rho dt} = \frac{1}{\pi} (0, 2, 0).$$

2. Cas où $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b \cup \Gamma_c$:

On paramètre Γ_a par γ_a donnée par:

$\gamma_a(t) = \overrightarrow{OP_a} + t\overrightarrow{P_aP_b}$, $t \in [0, 1]$. Donc :

$$\gamma_a(t) = (0, 1, 0) + t(0, -1, 1) = (0, 1 - t, t), \quad t \in [0, 1], \quad \gamma_a'(t) = (0, -1, 1), \quad \|\gamma_a'(t)\| = \sqrt{2}.$$

On paramètre Γ_b par γ_b donnée par:

$\gamma_b(t) = \overrightarrow{OP_b} + (t - 1)\overrightarrow{P_bP_c}$, $t \in [1, 2]$. Donc :

$$\gamma_b(t) = (0, 0, 1) + (t - 1)(1, 0, -1) = (t - 1, 0, 2 - t), \quad t \in [1, 2], \quad \gamma_b'(t) = (1, 0, -1), \quad \|\gamma_b'(t)\| = \sqrt{2}.$$

On paramètre Γ_c par γ_c donnée par:

$\gamma_c(t) = \overrightarrow{OP_c} + (t - 2)\overrightarrow{P_cP_a}$, $t \in [2, 3]$. Donc :

$$\gamma_c(t) = (1, 0, 0) + (t - 2)(-1, 1, 0) = (3 - t, t - 2, 0), \quad t \in [2, 3], \quad \gamma_c'(t) = (-1, 1, 0), \quad \|\gamma_c'(t)\| = \sqrt{2}.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} &= \frac{\int_0^3 \rho(\gamma(t))\gamma(t)\|\gamma'(t)\|dt}{\int_0^3 \rho(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt} \\
&= \frac{\int_0^1 \rho(\gamma_a(t))\gamma_a(t)\|\gamma'_a(t)\|dt + \int_1^2 \rho(\gamma_b(t))\gamma_b(t)\|\gamma'_b(t)\|dt + \int_2^3 \rho(\gamma_c(t))\gamma_c(t)\|\gamma'_c(t)\|dt}{\int_0^1 \rho(\gamma_a(t))\|\gamma'_a(t)\|dt + \int_1^2 \rho(\gamma_b(t))\|\gamma'_b(t)\|dt + \int_2^3 \rho(\gamma_c(t))\|\gamma'_c(t)\|dt} \\
&= \frac{\int_0^1 \rho_a(0, 1-t, t)\sqrt{2}dt + \int_1^2 \rho_b(t-1, 0, 2-t)\sqrt{2}dt + \int_2^3 \rho_c(3-t, t-2, 0)\sqrt{2}dt}{\int_0^1 \rho_a\sqrt{2}dt + \int_1^2 \rho_b\sqrt{2}dt + \int_2^3 \rho_c\sqrt{2}dt} \\
&= \frac{1}{(\rho_a + \rho_b + \rho_c)} \left(\rho_a \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \rho_b \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + \rho_c \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \right) \\
&= \frac{1}{2(\rho_a + \rho_b + \rho_c)} \left(\rho_b + \rho_c, \rho_a + \rho_c, \rho_a + \rho_b \right)
\end{aligned}$$

On vérifie alors facilement que, si $\overrightarrow{OC} = (\alpha, \beta, \gamma)$,

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < 1,$$

i.e. le point C se trouve à l'intérieur du triangle.

Si $\rho_a = \rho_b = \rho_c$, alors le point $C = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$ est le barycentre de ce triangle.

Exercice 2.

1. En utilisant les définition du vecteur tangent et du vecteur courbure, on obtient :

$$\begin{aligned}
T(t) &= \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} (x'(t), y'(t)) \\
T'(t) &= \frac{1}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} (x''(t)(y'(t))^2 - y''(t)x'(t)y'(t), y''(t)(x'(t))^2 - x''(t)x'(t)y'(t)) \\
K(t) &= \frac{1}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^2} (x''(t)(y'(t))^2 - y''(t)x'(t)y'(t), y''(t)(x'(t))^2 - x''(t)x'(t)y'(t)) \\
\|K(t)\| &= \frac{1}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^2} \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)(x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t))^2}.
\end{aligned}$$

2. Une paramétrisation du cercle centré en 0 et de rayon R est donnée par $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi)$. En utilisant 1., on a donc :

$$\|K(t)\| = \frac{R^2 |-\cos^2(t) - \sin^2(t)|}{(R^2 \cos^2(t) + R^2 \sin^2(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R}.$$

3. Pour l'ellipse, on utilise la paramétrisation $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, pour $t \in [0, 2\pi)$. On a alors

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -a \sin t, & x''(t) &= -a \cos t, \\
y'(t) &= b \cos t, & y''(t) &= -b \sin t.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)| = |-ab \cos^2 t - ab \sin^2 t| = ab,$$

$$\begin{aligned}x'(t)^2 + y'(t)^2 &= a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \\ &= a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t.\end{aligned}$$

on obtient alors :

$$\|K(t)\| = \frac{ab}{(a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t)^{3/2}},$$

et l'on retrouve le cas du cercle pour $a = b = R$.

Pour l'hyperbole, on choisit comme paramétrisation $\gamma(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$, avec $t \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\begin{aligned}x' &= a \sinh t, & x'' &= a \cosh t, \\ y' &= b \cosh t, & y'' &= b \sinh t.\end{aligned}$$

On a directement

$$\|K(t)\| = \frac{|x''y' - y''x'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|ab \cosh^2 t - ab \sinh^2 t|}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}}.$$

Exercice 3.

c.f. livre.

Exercice 4.

c.f. livre.

Exercice 5.

Grâce à la formule donnée, on peut écrire

$$\begin{aligned}\rho \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \overrightarrow{\text{grad}}p + \rho g \vec{e}_3 &= \rho \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \\ \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{v} + p + \rho g x_3 \right) &= \rho \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}.\end{aligned}$$

On intègre maintenant le terme de droite le long de la ligne de courant Γ :

$$\int_{\Gamma} (\rho \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{\Gamma} (\rho \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = \int_{\Gamma} (\rho \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \alpha^{-1}(t) \vec{v} dt = 0.$$

En effet, pour tout vecteur \vec{u} , on a $(\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = 0$. L'intégration du membre de gauche le long d'une ligne de courant donne le théorème de Bernouilli.