Exercice 1.

☐ $\displaystyle\iint_\Omega \left(\overrightarrow{\text{grad}}u \cdot \overrightarrow{\text{grad}}v - \frac{\partial u}{\partial x_1}v\right) \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \iint_\Omega v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, \quad \forall v \in V.$

FAUX Il y a un problème de signe. La technique classique est de multiplier l'équation aux dérivées partielles (EDP) par $v \in V$, puis d'intégrer par parties le terme au Laplacien.

$$\iint_\Omega -\Delta uv = \iint_\Omega \overrightarrow{\text{grad}}u \cdot \overrightarrow{\text{grad}}v - \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{\text{grad}}u \cdot \nu v = \iint_\Omega \overrightarrow{\text{grad}}u \cdot \overrightarrow{\text{grad}}v,$$

car $v = 0$ sur $\partial\Omega$. On obtient alors

$$\iint_\Omega \left(\overrightarrow{\text{grad}}u \cdot \overrightarrow{\text{grad}}v + \frac{\partial u}{\partial x_1}v\right) = \iint_\Omega v. \tag{1}$$

☒ $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1}v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0, \quad \forall v \in V.$

VRAI On remarque que

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}v = \frac{\partial}{\partial x_1}(v^2),$$

on a alors

$$\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1}v = \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}(v^2) = \int_0^1 \mathrm{d}x_2 \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(v^2) = \int_0^1 \mathrm{d}x_2(v^2(1, x_2) - v^2(0, x_2)) = 0,$$

car $v = 0$ sur $\partial\Omega$.

☒ Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème, alors $\displaystyle\iint_\Omega \|\overrightarrow{\text{grad}}(u_1 - u_2)\|^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0.$

VRAI On pose $w = u_1 - u_2$. w est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta w + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ w = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On multiplie d'EDP par w et on intègres par parties pour obtenir

$$\iint_\Omega \left(\overrightarrow{\text{grad}}w \cdot \overrightarrow{\text{grad}}w + \frac{\partial w}{\partial x_1}w\right) = 0,$$

soit

$$\iint_\Omega \|\overrightarrow{\text{grad}}w\|^2 = 0,$$

en utilisant le résultat de la question précédente.

☒ La solution du problème, si elle existe, est unique.

VRAI D'après la question précédente, $\overrightarrow{\text{grad}}w = 0$ dans Ω (on rappelle les arguments dans la série 3 : si ϕ est une fonction telle que $\phi \geq 0$ sur Ω et $\iint_\Omega \phi = 0$, alors $\phi = 0$ sur Ω). Ainsi w est constante sur Ω, et comme $w = 0$ sur $\partial\Omega$, on a $w = 0$ sur Ω. Ainsi si u_1 et u_2 sont deux solutions, elles sont identiques, ce qui prouve l'unicité de la solution.

☒ $\iint_\Omega \|\overrightarrow{\text{grad}} u\|^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \iint_\Omega u \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$.

VRAI Il suffit de remplacer v par u dans (1), puis d'utiliser le résultat de la question 2.

Exercice 2.

On pose $v = \varphi_i$ et $u = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j$. On injecte dans la forme faible (1) pour obtenir

$$\iint_\Omega \left(\overrightarrow{\text{grad}} \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \right) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \right) \varphi_i \right) = \iint_\Omega \varphi_i.$$

On factorise la somme pour obtenir

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} u_j = f_i,$$

où

$$A_{ij} = \iint_\Omega \left(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \varphi_i \right) \text{ et } f_i = \iint_\Omega \varphi_i.$$

On remarque qu'une intégration par parties donne

$$\iint_\Omega \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \varphi_i = - \iint_\Omega \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \int_0^1 \mathrm{d}x_2 (\varphi_i(1, x_2) \varphi_j(1, x_2) - \varphi_i(0, x_2) \varphi_j(0, x_2)) = - \iint_\Omega \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}.$$

En effet, les fonctions de base sont dans V, donc elles s'annulent au bord. On peut donc aussi bien écrire

$$A_{ij} = \iint_\Omega \left(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \varphi_j \right).$$

Conclusion :

☒ $A_{ij} = \iint_\Omega \left(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \varphi_i \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$.

☒ $A_{ij} = \iint_\Omega \left(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \varphi_j \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$.

☒ $f_i = \iint_\Omega \varphi_i(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$.

☐ $A_{ij} = \iint_\Omega \left(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \varphi_j \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$.

☐ $A_{ij} = \iint_\Omega \left(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \varphi_i \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$.

Exercice 3.

On procède comme dans le cours. On multiplie $-u''(x) = f(x)$ par $v(x)$ et on intègre entre 0 et 1, puis on intègre par parties et on choisit v telle que $v(0) = v(1) = 0$. La formulation variationnelle consiste donc à chercher $u \in V$ tel que

$$\int_0^1 u'(x) v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in V,$$

où

$$V = \{v : (0,1) \to \mathbb{R}, \int_0^1 (v(x))^2 dx < +\infty, \int_0^1 (v'(x))^2 dx < +\infty, v(0) = v(1) = 0\}.$$

La méthode de Galerkin consiste à chercher $u_N \in V_N$ tel que

$$\int_0^1 u_N'(x) v_N'(x)\, dx = \int_0^1 f(x) v_N(x)\, dx \qquad \forall v_N \in V_N.$$

On pose $u_N(x) = \sum_{j=1}^N U_j \varphi_j(x)$ et on choisit $v_N(x) = \varphi_i(x)$, $i = 1, ..., N$. On obtient le système linéaire $A\vec{U} = \vec{F}$, où $\vec{U}$ est le vecteur de coordonnées $U_1, .., U_N$, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ et $\vec{F} \in \mathbb{R}^N$ sont définis par:

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\, dx, \quad i, j = 1, ..., N, \quad F_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i\, dx, \quad i = 1, ..., N.$$

Si $\varphi_i(x) = \sin(i\pi x)$ on obtient

$$A_{ii} = \int_0^1 \sin^2(i\pi x) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\cos^2(i\pi x) + \sin^2(i\pi x)) dx = \frac{1}{2},$$

pour $i = 1, ...N$, et $A_{ij} = 0$ pour $j \neq i$. Si $f(x) = 1$, alors $u(x) = x(1-x)/2$, on a

$$F_i = \int_0^1 \sin(i\pi x) dx = \frac{1-(-1)^i}{i\pi}, \quad U_i = \frac{2}{i^2\pi^2}\frac{1-(-1)^i}{i\pi},$$

et donc

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^N \frac{2}{i^2\pi^2}\frac{1-(-1)^i}{i\pi}\sin(i\pi x).$$

Finalement $u(1/2) = 1/8 = 0.125$ et $u_5(1/2) = 4/\pi^3(1 - 1/3^3 + 1/5^3) \simeq 0.1253$.