Exercice 1.
c.f. exercice 13.1 du livre.

Exercice 2.
On écrit $a = \alpha + i\beta$, $b = \gamma + i\delta$, $z = x + iy$ et $f(z) = u + iv$. On a

$$\begin{aligned} f &= u + iv \\ &= (\alpha + i\beta)(x + iy) + (\gamma + i\delta) \\ &= (\alpha x - \beta y + \gamma) + i(\beta x + \alpha y + \delta) \end{aligned}$$

et donc

$$u = (\alpha x - \beta y + \gamma), \qquad v = \beta x + \alpha y + \delta.$$

En inversant les relations ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}(u - \gamma) + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}(v - \delta) \\ y &= \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}(u - \gamma) + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}(v - \delta) \end{aligned}$$

Cas 1 (droites) : Supposons que $\lambda x + \mu y = \nu$. Alors

$$\frac{(\lambda\alpha - \mu\beta)u + (\lambda\beta + \mu\alpha)v}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(\lambda\alpha - \mu\beta)\gamma + (\lambda\beta + \mu\alpha)\delta}{\alpha^2 + \beta^2} + \nu,$$

ce qui est bien l'équation d'une droite.
Cas 2 (cercles) : Supposons que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Posons

$$u_0 = \alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma, \qquad v_0 = \beta x_0 + \alpha y_0 + \delta.$$

En inversant les relations ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}(u_0 - \gamma) + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}(v_0 - \delta) \\ y_0 &= \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}(u_0 - \gamma) + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}(v_0 - \delta). \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} R^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ &= \left(\frac{\alpha(u - u_0)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\beta(v - v_0)}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2 + \left(\frac{-\beta(u - u_0)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha(v - v_0)}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2 \\ &= \frac{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

On conclut donc que

$$(\alpha^2 + \beta^2)R^2 = (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2,$$

ce qui est bien l'équation d'un cercle.

Solution alternative :
On note

$$f(z) = az + b, \quad f^{-1}(\omega) = \frac{\omega - b}{a}.$$

Cas 1 (droites) : Soit $z \in D_p(d) \subset \mathbb{C}$, où $D_p(d)$ dénote la droite de direction d passant par le point $p \in \mathbb{C}$. Soit $\omega = f(z)$. On a :

$$\begin{aligned} z \in D_p(d) &\Leftrightarrow z = p + \lambda d, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(\omega) = p + \lambda d \\ &\Leftrightarrow \frac{\omega - b}{a} = p + \lambda d \\ &\Leftrightarrow \omega = (ap + b) + \lambda(ad) \\ &\Leftrightarrow \omega \in D_{ap+b}(ad). \end{aligned}$$

Cas 2 (cercles) : Soit $z \in C_R(z_0) \subset \mathbb{C}$, où $C_R(z_0)$ est le cercle de rayon R centré en z_0. Soit $\omega = f(z)$. On a :

$$\begin{aligned} z \in C_R(z_0) &\Leftrightarrow |z - z_0| = R \\ &\Leftrightarrow |f^{-1}(\omega) - z_0| = R \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{\omega - b}{a} - z_0\right| = R \\ &\Leftrightarrow |\omega - (b + az_0)| = R|a| \\ &\Leftrightarrow \omega \in C_{R|a|}(b + az_0). \end{aligned}$$

Exercice 3.
c.f. exemple 13.8 du livre

Exercice 4.
c.f. livre.

Exercice 5.
c.f. livre.