

Exercice 1.

Comme z_0 est respectivement un zéro d'ordre k et l de p et q , on peut écrire

$$p(z) = (z - z_0)^k P(z), \quad q(z) = (z - z_0)^l Q(z),$$

avec P, Q des fonctions holomorphes telles que $P(z_0), Q(z_0) \neq 0$. Ainsi, en posant $F(z) = P(z)/Q(z)$, on a que F est holomorphe en z_0 , $F(z_0) \neq 0$ et

$$f(z) = (z - z_0)^{k-l} F(z).$$

1. Si $k \geq l$, alors la fonction $z \mapsto (z - z_0)^{k-l}$ est holomorphe. La fonction f est donc le produit de deux fonctions holomorphes en z_0 . Par conséquent, z_0 est un point régulier de f .

2. Si $l > k$, alors

$$f(z)(z - z_0)^{l-k} = F(z),$$

qui est holomorphe et ne s'annule pas en z_0 . Par conséquent, z_0 est un pôle d'ordre $l - k$ de f .

Exercice 2.

Par l'exercice 1., z_0 est un pôle d'ordre 1 de f . Le résidu est donc donné par

$$\begin{aligned} \text{Rés}_{z_0}(f) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{q(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0}} \\ &= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

c.f. livre.

Exercice 4.

c.f. livre.

Exercice 5.

c.f. livre.

Exercice 6.

c.f. livre.

Exercice 7.

c.f. livre.

Exercice 8.

On commence par chercher les pôles de $f(z) = (z^2 - a^2 - i\varepsilon)^{-1}$. On introduit $b \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^2 - a^2 - i\varepsilon = z^2 - b^2 = (z - b)(z + b).$$

On peut calculer explicitement b , mais pour cet exercice, on se contentera de son comportement quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On trouve aisément un développement limité de b à l'ordre 1 en ε :

$$b = a + \frac{i\varepsilon}{2a} + o(\varepsilon).$$

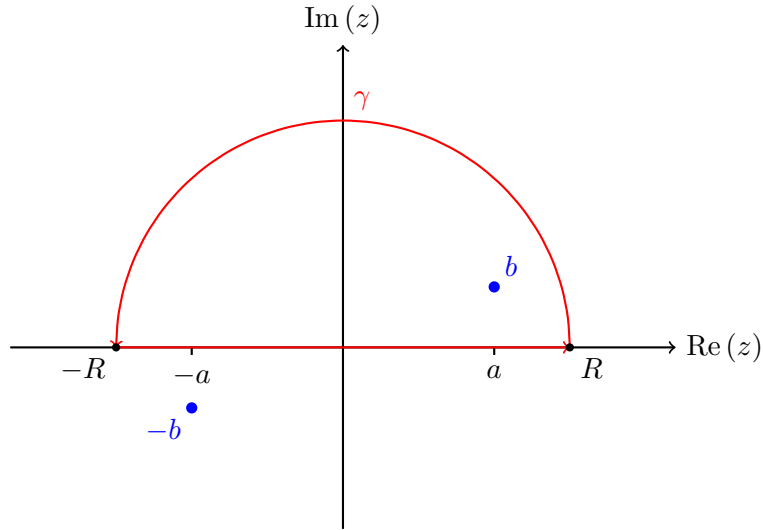


Figure 1: Le lacet utilisé pour le théorème des résidus.

Le choix du signe de b est arbitraire. Soit $R > |b|$, on introduit le lacet γ indiqué sur la figure 1. L'indice de ce lacet est 1, et le théorème de résidus donne

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2i\pi \text{Rés}_b(f).$$

D'une part,

$$\text{Rés}_b(f) = \lim_{z \rightarrow b} (z - b)f(z) = \lim_{z \rightarrow b} \frac{1}{z + b} = \frac{1}{2b}.$$

D'autre part,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{-R}^R f(x)dx + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz,$$

où $\mathcal{C}_R = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R, \text{Im}(z) > 0\} = \{\gamma_R(t), 0 < t < \pi\}$ est l'arc de cercle, de paramétrisation $\gamma_R(t) = Re^{it}$. On écrit alors

$$R^2 = |R^2 e^{2it}| = |R^2 e^{2it} + b^2 - b^2| \leq |R^2 e^{2it} - b^2| + |b|^2,$$

ce qui donne

$$|R^2 e^{2it} - b^2| \geq R^2 - |b|^2 \Rightarrow \frac{1}{|R^2 e^{2it} - b^2|} \leq \frac{1}{R^2 - |b|^2}.$$

On peut ainsi borner l'intégrale sur l'arc de cercle pour montrer que sa limite est nulle pour $R \rightarrow \infty$.

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz \right| \leq \left| \int_0^{\pi} \frac{iR e^{it}}{R^2 e^{2it} - b^2} dt \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{|R^2 e^{2it} - b^2|} dt \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2 - |b|^2} dt = \frac{\pi R}{R^2 - |b|^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx = 2i\pi \text{Rés}_b(f) = \frac{i\pi}{b}.$$

Comme $b \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on conclut

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - a^2 - i\varepsilon} = \frac{i\pi}{a}.$$