DÉTAILS DE PARTIE (2) DANS LA PREUVE DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Soit $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ un polynôme avec $n > 0$, $a_n \neq 0$, et coéfficients complexes. Supposons par absurde qu'il existe $z_* \in \mathbb{C}$ avec

$$p(z_*) \neq 0,$$

et

$$|p(z_*)| = \min_{z\in\mathbb{C}} |p(z)|.$$

On va montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ avec

$$|p(z)| < |p(z_*)|,$$

contredisant l'hypothèse. Comme discuté en cours, en écrivant

$$z^j = \sum_{k=0}^{j} \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array} \right) (z - z_*)^k z_*^{j-k},$$

et substituant dans l'expression pour $p(z)$, on arrive è une expansion

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (z - z_*)^k.$$

Si on substitute $z = z_*$, on trouve $b_0 = p(z_*)$. Soit k' l'index minimal avec $k' > 0$ et $b_{k'} \neq 0$. Comme $b_n = a_n \neq 0$, il en existe toujours un tel index. Écrivons

$$p(z) = p(z_*) + b_{k'}(z - z_*)^{k'} + \sum_{k>k'} b_k (z - z_*)^k.$$

Si on pose $z - z_* = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, on arrive à

$$b_{k'}(z - z_*)^{k'} = b_{k'} r^{k'} (\cos(k'\theta) + i \sin(k'\theta)).$$

On choisit θ de telle manière (pourquoi c'est possible?) que

$$\frac{b_{k'}}{|b_{k'}|}(\cos(k'\theta) + i \sin(k'\theta)) = -\frac{p(z_*)}{|p(z_*)|}.$$

Cette relation est bien-définie, parce que $b_{k'} \neq 0, p(z_*) \neq 0$ par hypothèse. Il suit que

$$b_{k'}(z - z_*)^{k'} = -r^{k'} |b_{k'}| \cdot \frac{p(z_*)}{|p(z_*)|}.$$

On obtient donc avec ce choix de θ la relation

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z_*) - r^{k'} |b_{k'}| \cdot \frac{p(z_*)}{|p(z_*)|} + \sum_{k>k'} b_k (z - z_*)^k \\ &= \frac{p(z_*)}{|p(z_*)|}\big(|p(z_*)| - r^{k'}|b_{k'}| + \frac{|p(z_*)|}{p(z_*)} \sum_{k>k'} b_k (z - z_*)^k\big). \end{aligned}$$

Si on choisit

$$0 < r < \min\{1, (\sum_{k>k'} |b_k|)^{-1} \cdot \frac{|b_{k'}|}{2}, (\frac{|p(z_*)|}{|b_{k'}|})^{\frac{1}{k'}}\},$$

pourvu que $k' < n$ et $0 < r \leq (\frac{|p(z_*)|}{|b_{k'}|})^{\frac{1}{k'}}$ si $k' = n$, on arrive à

$$|p(z)| \leq |p(z_*)| - r^{k'}|b_{k'}| + \frac{r^{k'}|b_{k'}|}{2} = |p(z_*)| - \frac{1}{2} r^{k'} |b_{k'}| < |p(z_*)|,$$

ce qui est la contradiction désirée.