

EXAMEN BLANC

Ne paniquez pas, il y aura du crédit partiel généreux! Vous pouvez utiliser les théorèmes montrés au cours, sauf si une preuve détaillée est explicitement demandée. Vous pouvez aussi utiliser les résultats montrés dans les exercices, sauf si 'donner tous les détails' est indiqué.

Choisissez **sept** des problèmes suivants. Chaque problème vaut 10 points.

- (1) (i) Soit $U = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$, et

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} : U \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Montrer que pour tout lacet $\gamma : [0, 1] \longrightarrow U$, on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

- (ii) Montrer que la fonction

$$g(z) = \frac{z}{z-1}$$

admet un logarithme holomorphe sur U .

- (2) Classifier toutes les fonctions entières f (ou montrer qu'elles n'existent pas) telles que

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{3}{2}}} = 1.$$

Donner des arguments détaillés.

- (3) (i) Formuler le théorème de Casorati-Weierstrass et donner une preuve.

(ii) Montrer que si $f : U \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, où $U \subset \mathbb{C}$ est un domaine et $p \in U$, et si p est une singularité essentielle de f , alors pour tout $n \geq 1$ il existe $z_* \in \mathbb{C}$ qui est atteint au moins n fois par f ; ceci veut dire qu'il existent des points distinctes $z_1, z_2, \dots, z_n \in U \setminus \{p\}$ tels que $f(z_j) = z_*$.

Suggestion: si $B_{\delta_2}(p) \subset B_{\delta_1}(p) \subset U$, $0 < \delta_2 < \delta_1$, sont des disques, montrer qu'il existe un disque $B_{\delta_3}(p)$, $\delta_3 < \delta_2$, avec

$$f(B_{\delta_2}(p) \setminus B_{\delta_3}(p)) \cap f(B_{\delta_1}(p) \setminus B_{\delta_2}(p)) \neq \emptyset.$$

- (4) Donner tous les détails. Soient $p(z), q(z)$ deux polynômes. Montrer qu'il existe des nombres $r_1, r_2, \dots, r_k \in \mathbb{N}$, ainsi que des

nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, et un polynôme $r(z)$, telles que

$$\frac{p(z)}{q(z)} = r(z) + \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{r_l} \frac{\beta_{lj}}{(z - \alpha_l)^j},$$

où les β_{lj} sont des nombres complexes. En plus montrer que cette représentation est unique à une permutation des termes près.

- (5) (i) Classifier tous les pôles de la fonction

$$f(z) = \frac{z}{1 + z^3}$$

sur le domaine \mathbb{C} .

(ii) Soit γ le chemin consistant de trois segments $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ où γ_1 est le segment de ligne droite entre 0 et $R \in \mathbb{R}_+$, γ_2 est l'arc circulaire entre R et $R \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$ parcouru au sens positif, et γ_3 le segment de ligne droite qui lie $R \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$ à 0. Exprimer

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz$$

en terme de $\int_{\gamma_2} f(z) dz$ et un résidue. *Suggestion: quelle est la relation entre $\int_{\gamma_1} f(z) dz$ et $\int_{\gamma_3} f(z) dz$? L'identité $(e^{\frac{2\pi i}{3}})^3 = 1$ est utile.*

(iii) Déterminer $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3} dx$.

- (6) (i) Considérer la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2^n}}{z^{2^{n+1}} - 1}$$

Montrer que cette série converge localement uniformément et absolument sur la région $U = \mathbb{C} \setminus \partial D(0, 1)$.

(ii) Déterminer la valeur de la série pour $|z| > 1$. *Suggestion: utiliser les relations $\frac{z^{2^n}}{z^{2^{n+1}} - 1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z^{2^n} - 1} + \frac{1}{z^{2^n} + 1} \right]$, $n \geq 0$, et ensuite que $\frac{1}{z^{2^n} - 1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z^{2^{n-1}} - 1} - \frac{1}{z^{2^{n-1}} + 1} \right]$, $n \geq 1$.*

(iii) Utiliser (ii) pour déterminer la valeur de la série pour $|z| < 1$.

- (7) (i) Considérer le produit¹

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 - z^{2^j}).$$

Montrer que le produit converge localement uniformément et absolument sur le disque $|z| < 1$, vers une fonction holomorphe $f(z)$.

¹Ici ne pas confondre 2^j avec $2j!$

(ii) Déterminer la série de Taylor de f centrée en $z = 0$, et son rayon de convergence.

(8) Calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2(1+2x^2)} dx.$$

(9) *Donner tous les détails.* Décrire avec un argument détaillé toutes les fonctions holomorphes $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, où U est un voisinage (ouvert et connexe) de $\overline{D(0,1)}$, et tels que

$$\operatorname{Re} f(z) = 0, \quad z \in \partial D(0,1).$$

(10) *Donner tous les détails.* Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine, et $\{f_n\}_{n \geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui convergent localement uniformément vers $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Montrer que f est holomorphe, et que

$$f_n^{(k)}$$

converge localement uniformément vers $f^{(k)}$. Ici $f^{(k)}$ note la k -ième dérivée au sens complexe.

(11) Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$$

définit une fonction holomorphe en $D(0,1)$, et que pour tout $p \in \partial D(0,1) \setminus \{1\}$, il existe un voisinage U de p tel que f admet un prolongement holomorphe à U . *Suggestion: penser à $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$.*

(12) Soit $\alpha \in D(0,1)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Montrer que si f est une fonction entière qui satisfait la relation

$$2f(z) = f(\alpha z + \beta) + f(\alpha z + \gamma) \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

alors f est une fonction constante. Est-ce que c'est encore correcte si on remplace la constante 2 à gauche par $\frac{15}{8}$?