

ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 9

- (1) Soit $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$. Montrer que la fonction

$$\log z : \mathbb{C}_- \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\log(re^{it}) = \log r + it, \quad r > 0, \quad t \in (-\pi, \pi),$$

est holomorphe sur \mathbb{C}_- . Montrer que

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

Pourquoi ceci ne contredit pas le fait que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$

où $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est donné par $\gamma(t) = e^{2\pi it}$.

- (2) Donner des paramétrisations explicites du bord d'un carré dans la preuve de la proposition de Goursat, et montrer soigneusement, en utilisant les propriétés (1) à (5) en cours lundi, qu'on a bien l'identité

$$\int_{\partial Q} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial Q_j} f(z) dz,$$

où nous utilisons la notation du cours.

- (3) (*Régularisation de chemins*)

(i) Exhiber une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec support contenu dans $[-1, 1]$, et telle que

$$\chi \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(t) dt = 1.$$

(ii) Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. En prolongeant cette fonction comme constante au-delà de $0, 1$, on peut introduire les fonction régularisées

$$\gamma_\epsilon(t) := \int_{\mathbb{R}} \chi_\epsilon(t-s)\gamma(s) ds, \quad \epsilon > 0$$

où on pose

$$\chi_\epsilon(t) = \epsilon^{-1} \cdot \chi\left(\frac{t}{\epsilon}\right), \quad \epsilon > 0.$$

Montrer que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma_\epsilon(t) = \gamma(t)$$

uniformément en $t \in [0, 1]$. En plus, montrer que $\gamma_\epsilon \in C^\infty([0, 1])$ pour tout $\epsilon > 0$.

(4) Montrer que si (ici U est un domaine)

$$\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow U \subset \mathbb{C}$$

est une *homotopie continue*¹ entre $\gamma(t) := \Gamma(0, t)$ et $\tilde{\gamma}(t) := \Gamma(1, t)$, où $\gamma, \tilde{\gamma}$ sont des lacets au sens discuté en classe (donc différentiable par morceaux), et qu'étant donné

$$\delta > 0,$$

il existe $N \in \mathbb{N}$ et une collection de lacets $\gamma_i : [0, 1] \longrightarrow U \subset \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, N$ de classe C^1 , et tels que

$$d(\gamma, \gamma_1) < \delta, d(\gamma_j, \gamma_{j+1}) < \delta, j = 1, \dots, N-1, d(\tilde{\gamma}, \gamma_N) < \delta.$$

On note ici par $d(\gamma, \tilde{\gamma})$ la quantité

$$d(\gamma, \tilde{\gamma}) := \max_{t \in [0, 1]} |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)|.$$

¹Donc ici on suppose seulement la continuité de l'application Γ , sans aucune hypothèse sur la régularité des 'chemins intermédiaires' $t \rightarrow \Gamma(s, t)$, $s \in (0, 1)$.