ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 8

(1) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine. On écrit
$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$
pour toute fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Est-ce qu'il existe une fonction $f \in C^2(U;\mathbb{C})$ et holomorphe avec
$$u(x,y) = x^2 + y^2?$$
Est-ce qu'il existe une telle fonction avec
$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2?$$
Formuler un critère nécessaire afin qu'une fonction $u \in C^2(U;\mathbb{R})$ peut être la partie réelle d'une fonction holomorphe et de régularité[1] C^2 sur U. *Suggestion: équations de Cauchy-Riemann.*

(2) (i) Soit $f \in C^0_c(\mathbb{R})$, donc une fonction continue (prenant valeurs complexes) avec support compact: $\exists K \subset \mathbb{R}$ compacte tel que $f|_{K^c} = 0$. Montrer qu'alors l'expression
$$\hat{f}(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \cdot z}\, dx$$
est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Faites ceci sans utiliser (ii) en bas.
(ii) Montrer que la fonction $\hat{f}$ est analytique sur $\mathbb{C}$.

(3) Calculer
$$\int_\gamma e^z \cdot (\frac{1}{z} - \frac{2}{z^3})\, dz,$$
où $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ est donné par $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$.

[1] Cette hypothèse additionnelle n'est pas nécessaire parce que toute fonction holomoprhe est C^∞, mais nous n'avons pas encore montré ça.