

ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 7

- (1) En utilisant la deuxième caractérisation de l'holomorphie dans la proposition avec les quatre caractérisations équivalentes, montrer directement que si

$$f : U \rightarrow V,$$

est holomorphe en $z_* \in U$, où $U, V \subset \mathbb{C}$ sont des domaines, et si

$$g : V \rightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe en $f(z_*)$, alors la composition

$$g \circ f$$

est holomorphe en z_* et on a

$$(g \circ f)'(z_*) = g'(f(z_*)) \cdot f'(z_*).$$

- (2) Caractériser les points $p \in \mathbb{C}$ où les fonctions

$$\bar{z}^n \cdot (z - 1), \quad n \geq 0$$

sont holomorphes.

- (3) Soient $\gamma_{1,2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux applications de régularité C^1 , avec

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0),$$

et

$$\gamma_j'(0) \neq 0, \quad j = 1, 2.$$

On définit l'angle $\theta \in [0, \pi]$ entre les deux courbes au point d'intersection par

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(\gamma_1'(0) \overline{\gamma_2'(0)})}{\|\gamma_1'(0)\| \cdot \|\gamma_2'(0)\|}.$$

Montrer que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe avec $f'(\gamma_1(0)) \neq 0$, alors les courbes

$$\tilde{\gamma}_1(t) := f \circ \gamma_1, \quad \tilde{\gamma}_2(t) := f \circ \gamma_2$$

intersectent en $t = 0$ et que leur angle au point d'intersection est θ , donc inchangé.

- (4) Calculer directement les intégrales

$$\int_{\gamma_j} z^2 dz, \quad j = 1, 2,$$

où γ_j sont les chemins

$$\gamma_1(t) = t + i, \quad \gamma_2(t) = \cos(\pi t) + i \sin(\pi t), \quad t \in [0, 1].$$