ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 6

(1) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine, et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ différentiable en $z \in U$ comme application de U en $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est holomorphe en z si et seulement si

$$\bar{\partial} f(z) = 0,$$

où

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\big),$$

et on munit $\mathbb{R}^2$ des coordinées standard (x, y).

(2) Monter que si $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes en $z \in U$, alors $f \cdot g$ l'est aussi, et

$$\big(f \cdot g\big)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

(3) Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, et supposons que que $f'(z_*) \neq 0$ pour un $z_* \in U$. Alors il existe un voisinage $V \subset U$ de z_* ainsi qu'un voisinage $W \subset \mathbb{C}$ de $f(z_*)$, et telles que

$$f|_V : V \longrightarrow W$$

est une bijection, avec inverse $(f|_V)^{-1} : W \longrightarrow V$ holomorphe. Montrer que

$$\big(f^{-1}\big)'(f(z_*)) = \frac{1}{f'(z_*)}$$

Suggestion: souvenez-vous du théorème de l'inverse d'Analyse II.