ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 5

(1) Démontrez les propriétés suivantes pour les fonctions trigonométriques $\sin, \cos, \sinh$ et $\cosh$. Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ nous avons
   (a) $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$,
   (b) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,
   (c) $\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$,
   (d) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$,
   (e) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$,
   (f) $\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$,
   (g) $\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1$.

   Les formules (a)-(d) sont connues comme formules d'additions d'angles et la formule (e) comme la formule de De Moivre. Nous observons aussi la décomposition utile $e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

(2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Trouver une formule générale pour les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{k\cdot n}}{(k\cdot n)!}$$

   en utilisant l'exponentielle.

   Indice: Analyser d'abord la situation dans les cas $k = 2, 3, 4$ et après essayer de généraliser.

(3) Montrer que la série entière

$$f(z) := \sum_{n=o}^{\infty} z^{n!}$$

   a comme rayon de convergence 1. De plus montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ nous avons que $f(re^{2\pi i\alpha})$ n'est pas bornée lorsque $r \to 1$. *Ceci veut dire qu'il n'est pas possible de trouver un voisinage ouvert autour de 1 tel que $f(re^{2\pi i\alpha})$ est bornée.*