

## ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 4

(1) Soit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_*)^k$$

une série de puissances qui converge pour tout  $z \in U$ , où  $U \subset \mathbb{C}$  est un ensemble ouvert. Montrer que la fonction définie par cette série,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_*)^k$$

est analytique sur  $U$ ; donc  $f(z)$  admet une expansion en série de puissances autour de chaque  $p_* \in U$  (sur un disque  $D(p_*, \epsilon)$  avec  $\epsilon > 0$  suffisamment petit).

(2) Soit  $p(z)$  un polynôme quadratique avec coefficient constant non-nul. Développer

$$\frac{1}{p(z)}$$

en série de puissances autour de  $z = 0$  en utilisant la représentation de  $p(z)$  comme produit de facteurs linéaires.

(3) (i) Exhiber une série de puissances qui converge sur  $D(0, 1)$  et qui converge pour tout

$$z \in \partial D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

sauf en un point. *Suggestion: considérer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ .*

(ii) Exhiber une série de puissances qui converge sur  $D(0, 1)$  et qui converge pour tout

$$z \in \partial D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

sauf en une collection de points  $\{p_1, p_2, \dots, p_7\} \subset \partial D(0, 1)$  prescrite.