ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 3

(1) Compléter la preuve du lemme énoncé au cours jeudi:

Soit $\{f_k\}_{k\geq 0}$ une suite de fonctions qui converge normalement sur un sous-ensemble ouvert U de $\mathbb{C}$. Alors si $K \subset U$ est compacte, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{L^\infty(K)} < \infty.$$

(2) Montrer que si

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_*)^k, \ \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_*)^k$$

convergent sur $D(z_*, \epsilon)$, si on définit le produit

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_*)^k$$

formellement par multiplication terme par terme

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l},$$

alors le produit converge sur $D(z_*, \epsilon)$.

(3) Montrer que si la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_*)^k$$

a rayon de convergence $\rho > 0$, alors elle converge normalement sur $D(z_*, \rho)$.