

ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 2

- (1) Soit $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application \mathbb{R} -linéaire. Ceci veut dire qu'en oubliant la structure complexe sur \mathbb{R}^2 , l'application T est linéaire au sens habituel. Supposons que T soit injective. On dit que T préserve les angles, si

$$|w||z|\langle Tw, Tz \rangle = |Tw||Tz|\langle w, z \rangle$$

pour tout $w, z \in \mathbb{C}$. Ici $\langle w, z \rangle = \operatorname{Re}(w\bar{z})$ correspond au produit euclidéen standard sur \mathbb{R}^2 . Supposons que T préserve les angles.

(i) Montrer que si on pose $a := T(1)$, alors $a \in \mathbb{C}^*$ et $b := a^{-1}T(i) \in i\mathbb{R}$.

(ii) En considérant $\langle T(1), T(z) \rangle$ avec $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$ arbitraires, montrer que

$$|b| = 1.$$

En déduire que

$$T(z) = a \cdot z \text{ ou } T(z) = a \cdot \bar{z}.$$

(iii) Montrer que T comme auparavant préserve l'orientation de \mathbb{R}^2 si et seulement si $T(z) = a \cdot z$. *Rappel: une transformation linéaire de \mathbb{R}^n en soi préserve l'orientation, pourvu que la déterminante de la matrice la représentant (par rapport à une base quelconque) est positive.*

- (2) Soit $n > 1$ et soient $c_0 > c_1 > c_2 > \dots > c_n > 0$ des nombres réels. Montrer que le polynôme

$$p(z) := \sum_{j=0}^n c_j z^j$$

n'a pas de racine en \mathbb{C} de module ≤ 1 .

- (3) En se basant sur le fait que tout polynôme complexe $p(z)$ de degré $n > 0$ a une racine, montrer qu'on peut écrire

$$p(z) = c \cdot \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j)$$

pour des nombres complexes $\alpha_j \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}^*$.