ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 25

(1) Montrer que si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, alors les limites

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\epsilon(0)} \Gamma(y) \nabla^\alpha f(x-y)\, dy,\ \Gamma(y) = -\frac{1}{4\pi \|y\|},$$

existent uniformément en $x \in \mathbb{R}^3$, où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^3$, et

$$\nabla^\alpha = \prod_{j=1}^{3} \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}.$$

En déduire que

$$\Gamma * f \in C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

(2) Montrer que si $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ est radial et harmonique ($\triangle u = 0$), $u = u(\|x\|)$, alors

$$u(\|x\|) = c_1 \log \|x\| + c_2$$

pour des constantes $c_{1,2}$. En déduire que l'équation de Poisson

$$\triangle u = f,\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

est résolue par

$$u = \Gamma * f,\ \Gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \log \|x\|.$$

Sous quelle condition est-ce qu'on a $\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$?

(3) En utilisant (3) de série 24, déduire le principe du maximum pour les fonctions harmoniques en $\mathbb{R}^3$: si

$$u \in C^\infty(B_1(0)) \cap C^0(\overline{B_1(0)})$$

satisfait $\triangle u = 0$, alors u atteint[1] son maximum et minimum sur $\partial B_1(0)$.

[1] u prend valeurs réelles.