ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 23

(1) Vérifier l'identité

$$\vec{v}^T A\vec{w} = \mathrm{rot}\vec{f} \cdot \vec{v} \times \vec{w},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 & \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 \\ \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2 & 0 & \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 & \partial_3 f_2 - \partial_2 f_3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Montrer que si U est un domaine en $\mathbb{R}^3$ borné par une surface compacte, fermée et régulière, et que si V_1 est un 'trou' en U, tel que $\overline{V_1} \subset U$ et V_1 est aussi borné par une surface compacte, fermée et régulière et qu'on muni ∂U de l'orientation $\vec{n}$ qui pointe à l'exterieur de U, tandis qu'on muni ∂V_1 de l'orientation $\vec{n}$ qui pointe vers V_1, alors si $\vec{f} \in C^1\big(\bar{U}\backslash V_1\big)$, l'on a

$$\int\int\int_{\bar{U}\backslash V_1} \mathrm{div}\vec{f}\, dxdydz = \int\int_{\partial U} \vec{f} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \int\int_{\partial V_1} \vec{f} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

(3) Montrer que si $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ est harmonique, ce qui veut dire que $\triangle f = 0$, alors l'intégrale

$$g(r) := (4\pi r^2)^{-1} \int\int_{\partial B_r(0)} f(x)\, d\sigma,\ r > 0$$

ne dépend pas de r. Ici $\partial B_r(0) = \{y \in \mathbb{R},\ \|y\| = r\}$.
Suggestion: Vérifier (et ensuite utiliser) que $\int\int_{\partial B_r(0)} f(x)\, d\sigma = r^2 \int\int_{\partial B_1(0)} f(rx)\, d\sigma$. *Ensuite différencier et utiliser Gauss-Ostrogradskii.*