ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 23

(1) Montrer que si $\vec{f} \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, alors

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0,\ \nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \triangle \vec{f}.$$

Ici on définit $\triangle g = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}$ pour une fonction scalaire $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$, et $\triangle \vec{f}$ a comme composantes les $\triangle f_j$, $j = 1, 2, 3$. En plus

$$\nabla \cdot \vec{f} = \mathrm{div} \vec{f}.$$

(2) Soit $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ avec

$$\nabla \cdot \vec{f} = \mathrm{div} f = 0.$$

Montrer qu'il existe $\vec{g} \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ avec la propriété que

$$\mathrm{rot}(\vec{g}) = \vec{f}.$$

Pour ceci commençer avec les fonctions définies par

$$\int_0^{x_3} f_2(x_1, x_2, y)\, dy,\ -\int_0^{x_3} f_1(x_1, x_2, y)\, dy$$

et voir comment les modifier pour obtenir les composantes g_1, g_2.

(3) Montrer qu'en dimension $n = 3$ l'on a

$$\triangle(\frac{1}{r}) = 0,\ r \neq 0$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ est comme en (1).

(4) Montrer que si S est une surface compacte, fermée[1] et régulière en $\mathbb{R}^3$ (donc la surface est localement l'image d'une paramétrisation régulière comme définie au cours) avec orientation[2] $\mathbf{n}$, alors

$$\int_S \mathrm{rot}(\vec{f}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0$$

pour tout $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$.

[1] Sans bord. Penser à la sphère comme exemple.

[2] Ceci veut dire un choix de vecteur unitaire normale en chaque $\mathbf{p} \in S$ qui varie continûment.