## ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 22

(1) Exhiber un champ vectoriel $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec la propriété que
$$\mathrm{rot}\vec{f} = 0$$
mais tel que $\vec{f}$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

(2) Calculer
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$$
où
$$\vec{f} = \begin{pmatrix} ye^{xy} + \frac{y^2}{2x} + \frac{y^2}{2} \\ y \log x + \frac{x^2}{2} + xe^{xy} \end{pmatrix}$$
et $\gamma$ est le contour de $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ paramétré par
$$\gamma(t) = \big(2 + \sqrt{2}\cos t, \sqrt{3}\sin t\big),\ t \in [0, 2\pi].$$

(3) Construire une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de support compacte en $B_1(0)$, et telle que
$$\phi \geq 0$$
et
$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 1.$$
Montrer que si[1]
$$f \in C_0^0(B_1(0)),$$
alors la fonction $f * \phi$ donnée par
$$(f * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\phi(y)\, dy$$
est en $C_0^\infty(B_2(0))$.

[1]Ceci veut dire 'de support compacte en $B_1(0)$ et continue'.