

ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 21

- (1) Montrer soigneusement que si C_2 est le chemin qui consiste de deux petits arcs circulaires et un segment de ligne droite vertical dans la partie de U à gauche de l'axe imaginaire, comme dans la preuve de la proposition de Newman au cours, où U est un voisinage de $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$, et $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, alors

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{C_2} z^{-1} g(z) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{zT} dz = 0.$$

- (2) Montrer que si $U, V \subset \mathbb{C}$ sont deux domaines, alors $f : U \rightarrow V$ est conforme (biholomorphe) si et seulement si f est holomorphe et bijective. *Suggestion: écrire $f(z) = \phi^k(z)$, $k \geq 2$, autour de $p \in U$ avec $f'(p) = 0$. Dédire une contradiction avec l'injectivité.*
- (3) Montrer que si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une transformation conforme (biholomorphe), alors f est affine: $f(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. *Suggestion: montrer que la fonction $g(z) := f(\frac{1}{z})$, $z \in \mathbb{C}^*$, n'a pas une singularité essentielle en $z = 0$, en utilisant l'injectivité. De suite, montrer que $z = 0$ est un pôle simple pour g .*