

## ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 20

- (1) Montrer que pour  $\operatorname{Re} s > 1$ , la fonction  $\zeta(s)$  admet un logarithme holomorphe

$$h(s) := \log \zeta(s).$$

Montrer que  $\operatorname{Re}(1 - p^{-s}) > 0$  pour  $p$  nombre premier et  $\operatorname{Re} s > 1$ , et que si  $\log$  est la branche principale du logarithme naturel, alors

$$-\lim_{p_* \rightarrow \infty} \sum_{1 < p < p_*} \log(1 - p^{-s}) = h(s) + 2m\pi i, \operatorname{Re} s > 1,$$

où  $m \in \mathbb{Z}$  est un nombre entier constant. Ici la convergence est localement uniforme en  $s$ . En déduire que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = h'(s) = -\lim_{p_* \rightarrow \infty} \sum_{1 < p < p_*} [\log(1 - p^{-s})]',$$

où la convergence est localement uniforme en  $s$ . En déduire soigneusement que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \Phi(s) + \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}, \operatorname{Re} s > 1.$$

- (2) Montrer que si  $\zeta(s)$  est la prolongation holomorphe de  $\sum_{n \geq 1} n^{-s}$ ,  $\operatorname{Re} s > 1$ , à la région  $\{\operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$ , comme explicité en cours, alors

$$\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}.$$

- (3) Soit

$$f(z) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - z^m)^{-1}.$$

Montrer que le produit à droite converge localement uniformément sur le disque  $|z| < 1$ , et que la fonction  $f$  est holomorphe là. Montrer que la somme à droite en

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

converge localement uniformément sur le disque  $|z| < 1$ , et que la fonction  $h$  est un logarithme holomorphe de la fonction  $f$  sur le disque.