

ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 1

- (1) Montrer qu'un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ est fermé (donc son complément A^c est ouvert) si et seulement si pour toute suite

$$\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$$

qui converge vers $z \in \mathbb{C}$, l'on a $z \in A$.

- (2) Un ensemble ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est appelé *connexe*, pourvu qu'il n'existe pas de partition

$$U = A \cup B$$

où A, B sont ouverts, disjoints, et non-vides.

Montrer que si U est ouvert et connexe, alors U est connexe par chemins.

Remarque: on appelle un ensemble ouvert et connexe un *domaine*.

- (3) Soient $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ et posons

$$T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ceci est une application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{C} en soi.

- (a) Montrer que T est injectif (et donc bijectif) si et seulement si

$$\lambda \bar{\lambda} \neq \mu \bar{\mu}.$$

- (b) Montrer que

$$|T(z)| = |z|$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\lambda \mu = 0$ et $|\lambda + \mu| = 1$.

- (4) Montrer que si $\{a_{n,k}\}_{n,k=0}^{\infty}$ est une suite de nombres complexes et si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| < +\infty,$$

alors on peut changer l'ordre dans la double somme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}.$$