

ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 19

- (1) Montrer que si f est une fonction méromorphe sur $U \subset \mathbb{C}$ et $z_* \in U$ est un pôle d'ordre $k \geq 1$, alors

$$\operatorname{res}(f, z_*) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_* \\ z \neq z_*}} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_*)^k f(z)).$$

- (2) Montrer que si $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$, où f est une fonction croissante et continue par morceaux, alors

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{f(x) - x}{x^2} dx$$

n'existe pas.

- (3) Montrer soigneusement que

$$\prod_{1 < p < p_*} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum'_{n \geq 1} n^{-s}, \operatorname{Re} s > 1,$$

où p parcourt les nombres premiers, et la somme à droite range sur les $n \in \mathbb{N}$ qui n'ont que des diviseurs premiers $p \in (1, p_*)$.

- (4) Montrer que la série (p indique nombre premier)

$$\sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}$$

converge normalement sur $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ et définit une fonction holomorphe dans ce domaine. Est-ce qu'on peut prolonger le domaine d'holomorphicité à $\operatorname{Re} s > a$ pour un $a < \frac{1}{2}$?