ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 18

(1) Calculer (avec $a > 0$)
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}\,dx,\ \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^2+a^2)^2}\,dx$$

(2) Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ une fonction continue de support compacte sur $\mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier
$$\hat{f}(\xi)$$
peut être prolongée à une fonction entière $\hat{f}(z)$. En déduire que $\hat{f}$ ne peut pas avoir support compacte en $\mathbb{R}$.

(3) Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ une fonction qui satisfait $|f(x)| \leq e^{-a|x|}$ pour un $a > 0$. Montrer que $\hat{f}(\xi)$ peut alors être prolongée de manière holomorphe à la bande
$$\Im z \in (-a, a)$$
En utilisant la relation
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\,d\xi,$$
Montrer que si $\hat{f}$ est holomorphe dans la bande $\Im z \in (-a, a)$ et continue dans l'adhérence de cette bande, $a > 0$, et satisfait $\lim_{|\xi|\to+\infty} \xi^2 \max_{b\in[-a,a]} |\hat{f}(\xi + ib)| = 0$, alors
$$|f(x)| \leq Ce^{-a|x|}$$
pour une constante adéquate C.

(4) Montrer que si
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1,$$
où $\theta(x) = \sum_{p<x,\, p \text{ nombre premier}} \log p$, alors on a
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1,$$
où $\pi(x) = \big|\{p < x,\ \ p \text{ nombre premier}\}\big|$.