

## ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 17

(1) Calculer

$$\int_{\partial D(0,2)} (1+z+z^2)^{-1} dz$$

où  $\partial D(0,2)$  est parcourue une fois au sens positive.

(2) Déterminer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} dx.$$

(3) Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax+bi)^2} dx,$$

où  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Pouvez-vous généraliser ça au cas  $a = re^{it}$ ,  $r > 0$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{4})$ . Vous pouvez utiliser le fait que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

(4) Montrer que

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}.$$

(5) Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  l'on a

$$\cos(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).$$