

ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 16

(1) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(2) Montrer que si $U \subset \mathbb{C}$ est un domaine, $z_* \in U$, et $f : U \setminus \{z_*\} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, alors z_* est un pôle de f si et seulement si

$$\lim_{z \rightarrow z_*} |f(z)| = +\infty.$$

(3) Déterminer le résidu de la fonction $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, donnée par

$$f(z) = \cos(z^{-1}) \cdot \sin z,$$

en $z = 0$.

(4) Calculer

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,2)} \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz$$

Le cercle est paramétrisé par $t \in [0, 1] \rightarrow 2e^{2\pi i t}$.