ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 15

(1) Montrer que pour chaque domaine $U \subset \mathbb{C}$ les fonctions méromorphes sur U forment un corps. Donc si f, g sont méromorphes, alors

$$f \pm g,\ f \cdot g$$

le sont aussi, et si f est méromorphe et non-nulle alors

$$1/f$$

est méromorphe.

(2) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine, et soit $\{g_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur U. Supposons que

$$|g_n(z)| \leq \frac{1}{2}\, \forall z \in U, \forall n \geq 1,$$

et que la série $\sum_n g_n(z)$ converge normalement en U. Montrer que si log note la branche principale du logarithme naturel, alors la série

$$\sum_{n\geq 1} \log\big(1 + g_n\big)$$

converge normalement vers une fonction holomorphe sur U.

(3) Montrer que si $\{g_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions holomorphes sur le domaine $U \subset \mathbb{C}$ telle que la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge normalement, alors la suite de produits

$$\{\prod_{k=1}^{n} \big(1 + g_k(z)\big)\}_{n\geq 1}$$

converge localement uniformément vers une limite holomorphe $h(z)$ sur U. On écrit alors

$$h(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \big(1 + g_k(z)\big)$$

Montrer que si $N(f)$ note l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe f, alors

$$N(h) = \cup_{j=1}^{\infty} N(1 + g_j).$$