

ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 14

- (1) Déterminer les coefficients a_n , $|n| \leq 3$, dans la série de Laurent pour

$$f(z) = \sin(e^{\frac{1}{z}})$$

sur $A(0, 0, 1)$.

- (2) (i) Montrer que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, la série

$$z^{-1} + \sum_{k \geq 1} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}$$

converge localement uniformément et absolument (en $U = \mathbb{C} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$) vers une fonction holomorphe $g(z)$.

- (ii) Montrer que la fonction (ici $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$)

$$\cot z - g(z), \quad z \in U,$$

peut être prolongée à une fonction entière, donc holomorphe sur \mathbb{C} .

- (3) Soit f une fonction méromorphe sur \mathbb{C} telle qu'il existe $M > 0$, $n \in \mathbb{N}$, et $r > 0$ avec la propriété que

$$|f(z)| \leq M|z|^n, \quad z \in (D(0, r) \cup P(f))^c.$$

Ici $P(f)$ est l'ensemble des pôles de f . Montrer que la fonction f est rationnelle, donc le rapport de deux polynômes.