ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 13

(1) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe et soit $f : U \to \mathbb{C}^*$ holomorphe. Montrer que si on pose

$$h(z) = \log f(p) + \int_p^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta$$

pour un $p \in U$ fixe, où $\log f(p)$ est un choix de logarithme naturel de $f(p) \in \mathbb{C}^*$, et $\int_p^z = \int_\gamma$ note l'intégrale lelong d'un chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ qui lie p à z, alors

$$h(z),\ z \in U,$$

est bien-définie, et en plus

$$e^{h(z)} = f(z).$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe une k-ième racine holomorphe $g_k(z) : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$, donc une fonction holomorphe

$$g_k : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

avec la propriété que

$$\big(g_k(z)\big)^k = f(z).$$

(2) Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, z \in (0,1)\}$. Soit $f \in C^0(\bar{U})$ bornée et holomorphe sur U. Montrer que si pour deux nombres $a, b \in \mathbb{R}_+$ on a

$$|f(z)| \le a,\ \mathrm{Re}\, z = 0,$$
$$|f(z)| \le b,\ \mathrm{Re}\, z = 1,$$

alors on a

$$|f(z)| \le a^{1-\mathrm{Re}\, z} b^{\mathrm{Re}\, z},\ z \in U.$$

(3) (i) Montrer que si $a \in D(0,1)$, alors l'application

$$\phi_a(z) := \frac{z-a}{1-z\bar{a}}$$

est holomorphe sur $D(0,1)$ et envoye le disque en soi: $|\phi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in D(0,1)$. En plus, montrer que

$$|\phi_a(z)| = 1$$

si $z \in \partial D(0,1)$.

(ii) Soit $f \in C^0\big(\overline{D(0,1)}\big)$ et holomorphe sur $D(0,1)$. Supposons que

$$|f(z)| = 1\, \forall z \in \partial D(0,1).$$

Montrer qu'il existe un nombre fini de points $\{a_j\} \subset D(0,1)$ (pas nécessairement distinctes; cet ensemble peut être vide), ainsi que $\alpha \in \mathbb{R}$, et tels que

$$f(z) = e^{i\alpha} \prod_j \frac{z - a_j}{1 - z\bar{a}_j}.$$

Suggestion: réduire au cas d'une fonction sans zéros; ensuite principe du maximum.