ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 12

(1) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine, et $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui convergent localement uniformément vers $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Montrer que f est holomorphe, et que

$$f_n^{(k)}$$

converge localement uniformément vers $f^{(k)}$. Ici $f^{(k)}$ note la k-ième dérivée au sense complexe.

(2) Soit

$$U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, z \in (0,1)\},$$

et soit $f \in C^0(\bar{U})$ holomorphe en U et bornée. Montrer que si

$$|f|\big|_{\partial U} \leq 1,$$

alors $|f| \leq 1$ sur tout $\bar{U}$. En plus, $|f| < 1$ sur U sauf si f est constant. *Suggestion: réduire au cas* $\lim_{\Im z \to \pm\infty} f(z) = 0$. *Pour ceci considérer* $e^{\epsilon z^2}$, $\epsilon > 0$ *et petit.*

(3) (*) Soit U comme dans l'exercice précedent. Montrer qu'il existe $f \in C^0(\bar{U})$ et holomorphe en U avec $|f|\big|_{\partial U} \leq 1$ mais f non-bornée.

(4) Soient $p(z), q(z)$ deux polynômes. Montrer qu'il existe des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$, ainsi que des nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, et un polynôme $r(z)$, telles que

$$\frac{p(z)}{q(z)} = r(z) + \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_l} \frac{\beta_{lj}}{(z-\alpha_l)^j},$$

où les β_{lj} sont des nombres complexes. En plus montrer que cette représentation est unique à une permutation des termes près.

Suggestion: factoriser $q(z)$. *Écrire* $\frac{p(z)}{q(z)} = r(z) + \frac{\tilde{p}(z)}{q(z)}$ *avec* $\deg(\tilde{p}) < \deg(q)$. *Ensuite si* $\frac{\tilde{p}(z)}{q(z)} = (z-\alpha_l)^{-r_l} \cdot h(z)$ *avec* h *holomorphe autour de* α_l, *developer* $h(z)$ *en série de puissances autour de* α_l. *Enfin utiliser Liouville.*