ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 11

(1) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorphe. Soit $\gamma : [s, t] \longrightarrow U$ un lacet. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta \in \mathbb{Z}.$$

Interprétation géométrique?

(2) Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que si

$$|f(z)| \leq C|z|^n, \; n \geq 0$$

alors f est un polynôme de degré au plus n.

(3) (i) Est-ce qu'il existe une fonction holomorphe, bornée et non-constante $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$?
(ii) Est-ce qu'il existe une fonction holomorphe, bornée et non-constante $f : \mathbb{C}_- = \mathbb{C} \backslash \{x \in \mathbb{R}, \; x \leq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$?

(4) Exhiber une fonction holomorphe $f : D(0, 1) \longrightarrow \mathbb{C}$ avec la propriété que pour tout $p \in D(0, 1)$ le rayon de convergence de la série de puissances représentant f en p est égal à

$$\operatorname{dist}(p, \partial D(0, 1)).$$

(5) Montrer que si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est entière, alors l'image $f(\mathbb{C})$ est dense en $\mathbb{C}$, donc il n'existe pas de disc $D(p, \delta), \delta > 0$ dans le complément de l'image.

(6) Montrer qu'on peut définir une fonction holomorphe $g(z)$ sur $\mathbb{C} \backslash [0, 1]$ qui satisfait

$$g^2(z) = z(1 - z), \; z \in \mathbb{C} \backslash [0, 1].$$

Autrement dit, on peut définir la fonction

$$\sqrt{z(1 - z)}$$

de manière holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash [0, 1]$.