

### ANALYSE III AVANCÉE, SÉRIE 10

- (1) Soit  $K \subset U \subset \mathbb{C}$  où  $U$  est un domaine et  $K$  compacte. Montrer qu'il existe un ouvert  $V$  tel que  $\bar{V} \subset U$  et  $K \subset V$ . De suite montrer qu'il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $q \in \bar{V}$ , on a que

$$D(q, \delta) \subset U.$$

- (2) Soit le lacet  $\gamma : [0, 4] \rightarrow \mathbb{C}$  définie comme suit: pour  $t \in [0, 1]$ ,  $\gamma(t) = -2 - 2i + 4t + i \sin(\pi t)$ , pour  $t \in [1, 2]$ ,  $\gamma(t) = 2 - 2i + 4i(t-1) + \cos(\pi t) + 3 - 2t$ , pour  $t \in [2, 3]$ ,  $\gamma(t) = 2 + 2i - 4(t-2)$ , et enfin pour  $t \in [3, 4]$ ,  $\gamma(t) = -2 + 2i - 4i(t-3)^2$ . Déterminer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \left( \frac{\cos z}{z} - \frac{\sin z}{z^4} \right) dz.$$

- (3) Déterminer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - (3+i)z + 2 + 2i},$$

où  $\gamma$  est le contour de l'ellipse  $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{20} = 1$  paramétrée de telle manière qu'on passe autour de l'origine une fois en orientation positive (contre le sens de l'horloge).