

$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
 $F = mg = ma = m \frac{d^2h}{dt^2}$
 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{dt} = \frac{dC}{dt} = \frac{dD}{dt} = (c_1)AB - (c_2)CD$
 $y = mx + b$

$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} = \frac{dy}{dx}$

Gottfried Wilhelm Leibniz
 Maria Theresia Agnesi

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
 $\int \sin x dx = -\cos x + c$
 $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$
 $f(x) = x^2$

$x^2 - 3x - 4 = 0$
 $4x^2 - 3x - 1 = 0$

$\int f(x) dx$

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$
 $\frac{df(x)}{dz}$

Calculus

Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Dérivées d'ordres supérieurs

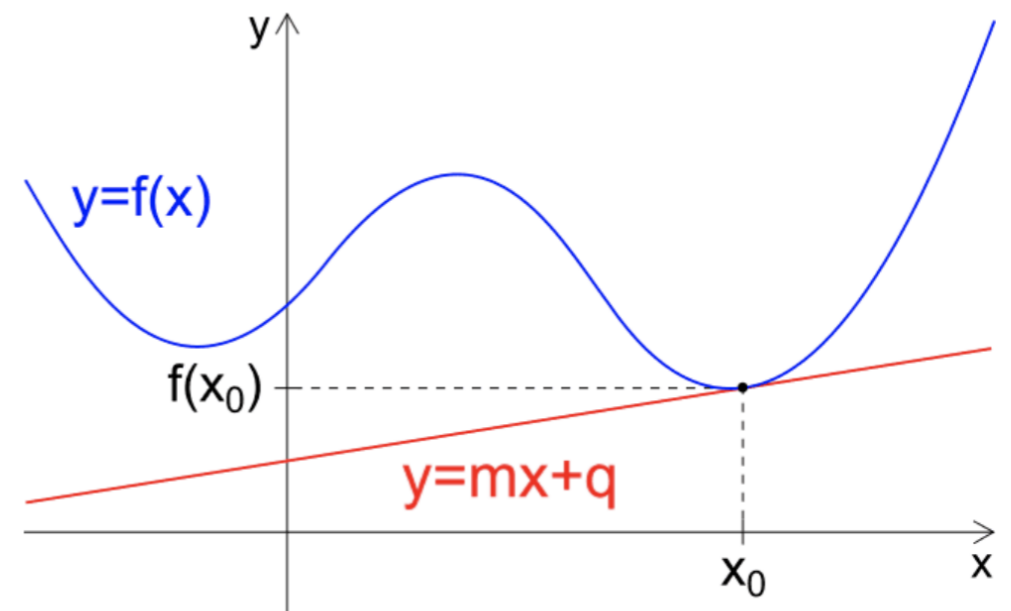
Philippe Chabloz

Dérivée seconde

- ❖ Le processus de différenciation peut être appliqué *plusieurs fois de suite*, conduisant notamment à la dérivée seconde f'' de la fonction f , qui n'est que la dérivée de la dérivée f' .
- ❖ La dérivée seconde a souvent une *interprétation physique utile*. Par exemple, si $f(t)$ est la position d'un objet au temps t , alors $f'(t)$ est sa **vitesse** au temps t et $f''(t)$ est son **accélération** au temps x .

On définit la **dérivée seconde de la fonction continue et dérivable f dans le point x_0** comme

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$



Point stationnaire et extrema

Définitions

Soit f une fonction et x_0 un point de D_f .

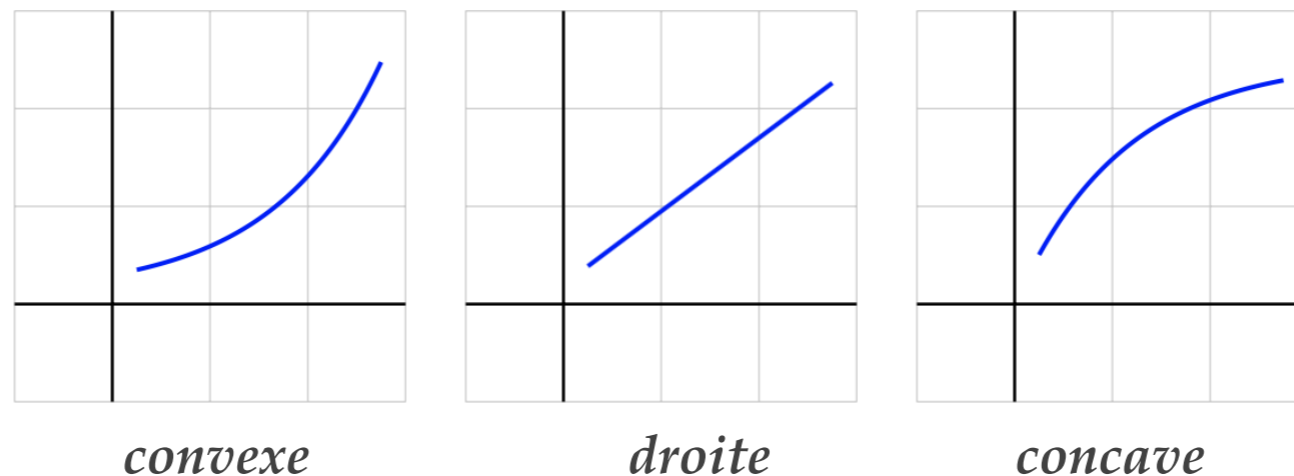
1. Le point x_0 est appelé **un point stationnaire de f** si $f'(x_0) = 0$.
2. Le point x_0 est appelé **un maximum local de f** si x_0 est un maximum de f sur un voisinage de x_0 , c'est-à-dire si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in]x_0 - \epsilon ; x_0 + \epsilon[$
3. Le point x_0 est appelé **un minimum local de f** si x_0 est un minimum de f sur un voisinage de x_0 , c'est-à-dire si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in]x_0 - \epsilon ; x_0 + \epsilon[$
4. Un point x_0 est appelé **extremum local** s'il est soit un minimum local soit un maximum local.

Un point stationnaire n'est pas nécessairement un extremum local !!

Et un extremum local n'est pas nécessairement un point stationnaire !!

Interprétation géométrique

- ❖ Il est naturel de se demander si une fonction continue est croissante ou décroissante, mais aussi de se demander *comment* une fonction est croissante ou décroissante.
- ❖ Considérons les trois fonctions continue et croissantes ci-dessous : l'une est croissante à un taux croissant, l'autre est croissante à un taux constant et la troisième est croissante à un taux décroissant, respectivement :



Fonction convexe ou concave ?

Soit $]a, b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle :

1. Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est **convexe** sur $]a, b[$.
2. Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est **concave** sur $]a, b[$.
3. Si f'' change de signe en x_0 alors f a un **point d'inflexion** en x_0 . Il est **nécessaire mais pas suffisant** que $f''(x_0) = 0$.

Exemple : la fonction $f(x) = x^4$ est convexe sur tout \mathbb{R} bien que $f''(0) = 0$.

Point d'inflexion

Définition: Soit f une fonction deux fois dérivable au voisinage de x_0 . Alors un x_0 est un **point d'inflexion** si **$f''(x)$ change signe en x_0**

→ si $f''(x_0)$ existe ceci implique que $f''(x_0) = 0$

→ mais $f''(x_0)$ peut très bien ne pas exister !! (exemple : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ci-après)

En un point d'inflexion, on a deux propriétés géométriques:

1. Le graphe de f croise sa tangente en x_0
2. La courbure du graphe de f passe de concave à convexe ou inversement.

Exemples: 1. Considérons la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

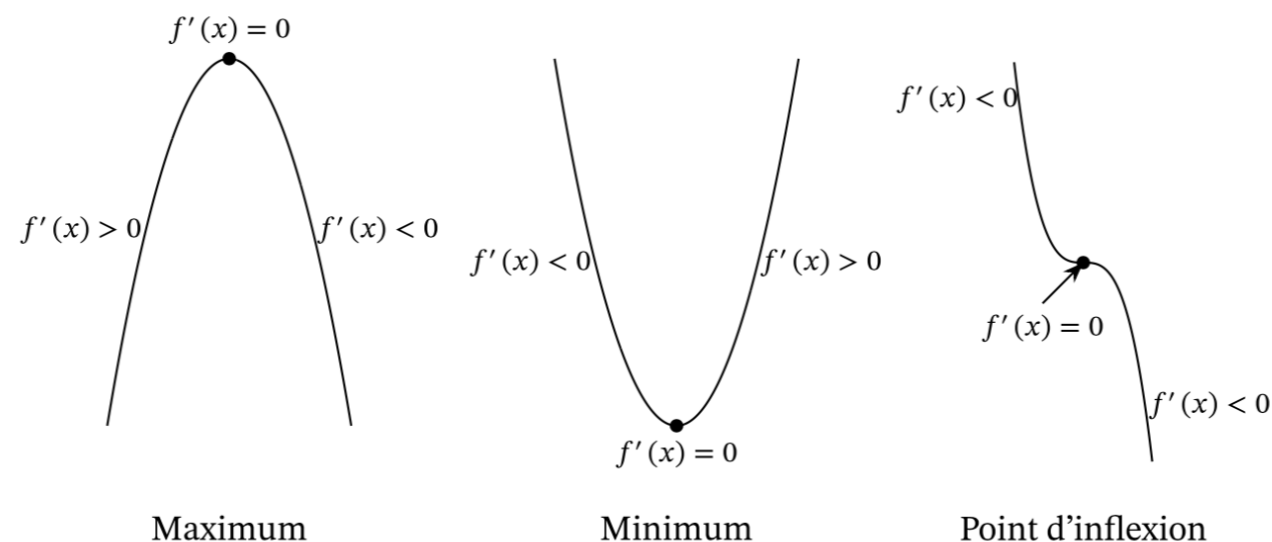
$$f''(x) = -\frac{4}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$$

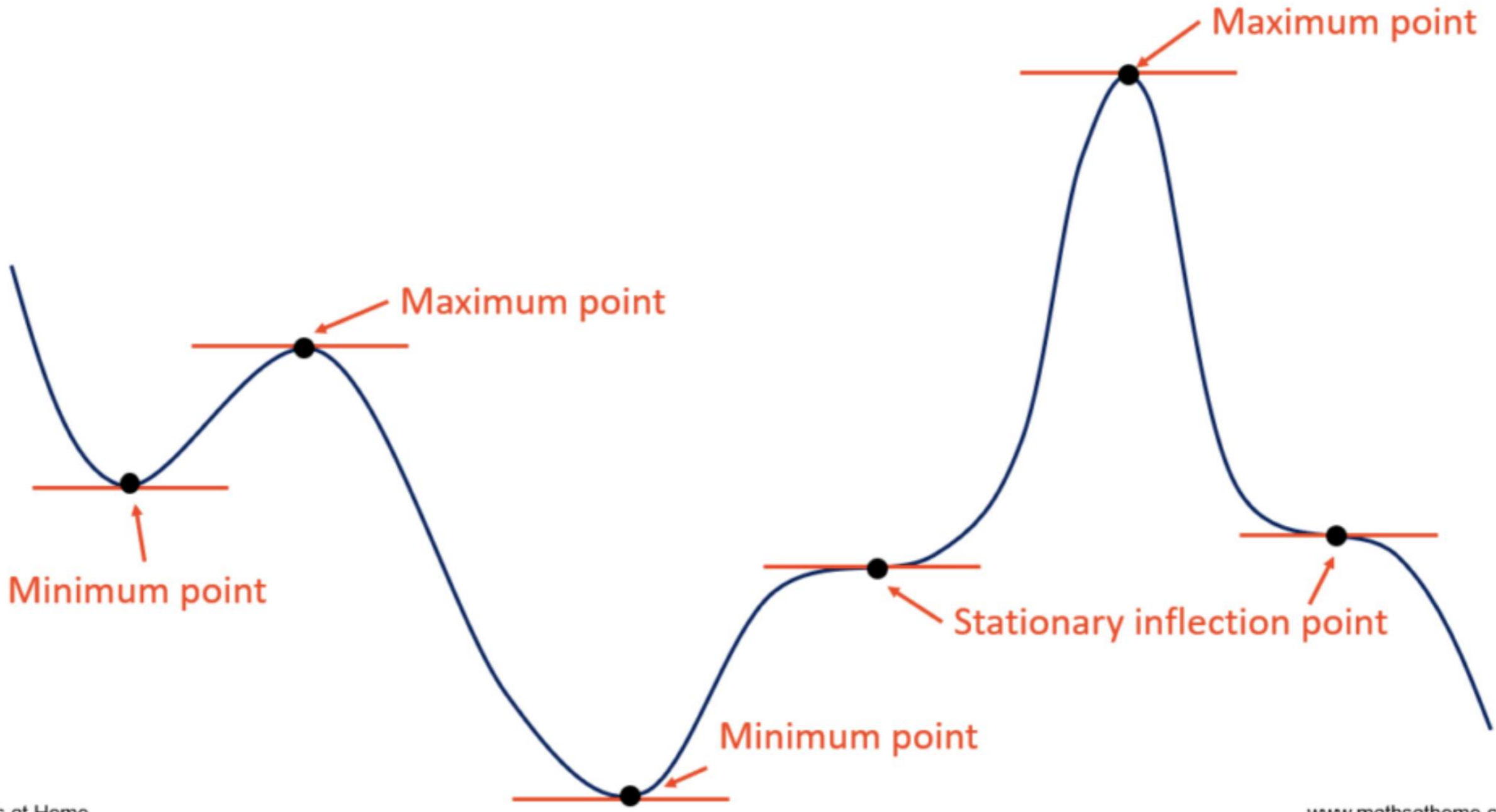
En $x_0 = 0$, f' et f'' n'existent pas !! Mais f'' est définie au voisinage de 0 et change de signe en 0. Donc le point $x_0 = 0$ est bien un point d'inflexion !!!

Trouver les extrema d'une fonction

Une des premières motivations du calcul différentiel fut de déterminer le maxima ou minima d'une fonction.

- ❖ L'étude des extrema (maximum et minimum, locaux ou globaux) passe par la recherche des zéros de la dérivée première, appelés **points stationnaires (ou critiques) de f** .
- ❖ Un point stationnaire n'est pas nécessairement un point d'extremum. On peut cependant, sous les hypothèses supplémentaires suivantes, affirmer qu'un point stationnaire est un extremum:
 - si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$ alors le point x_0 est un **maximum local**,
 - si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$ alors le point x_0 est un **minimum local**.
- si $f'(x_0) = 0$ et f'' **change de signe en x_0** alors le point x_0 est un **point d'inflexion et donc un plat**.





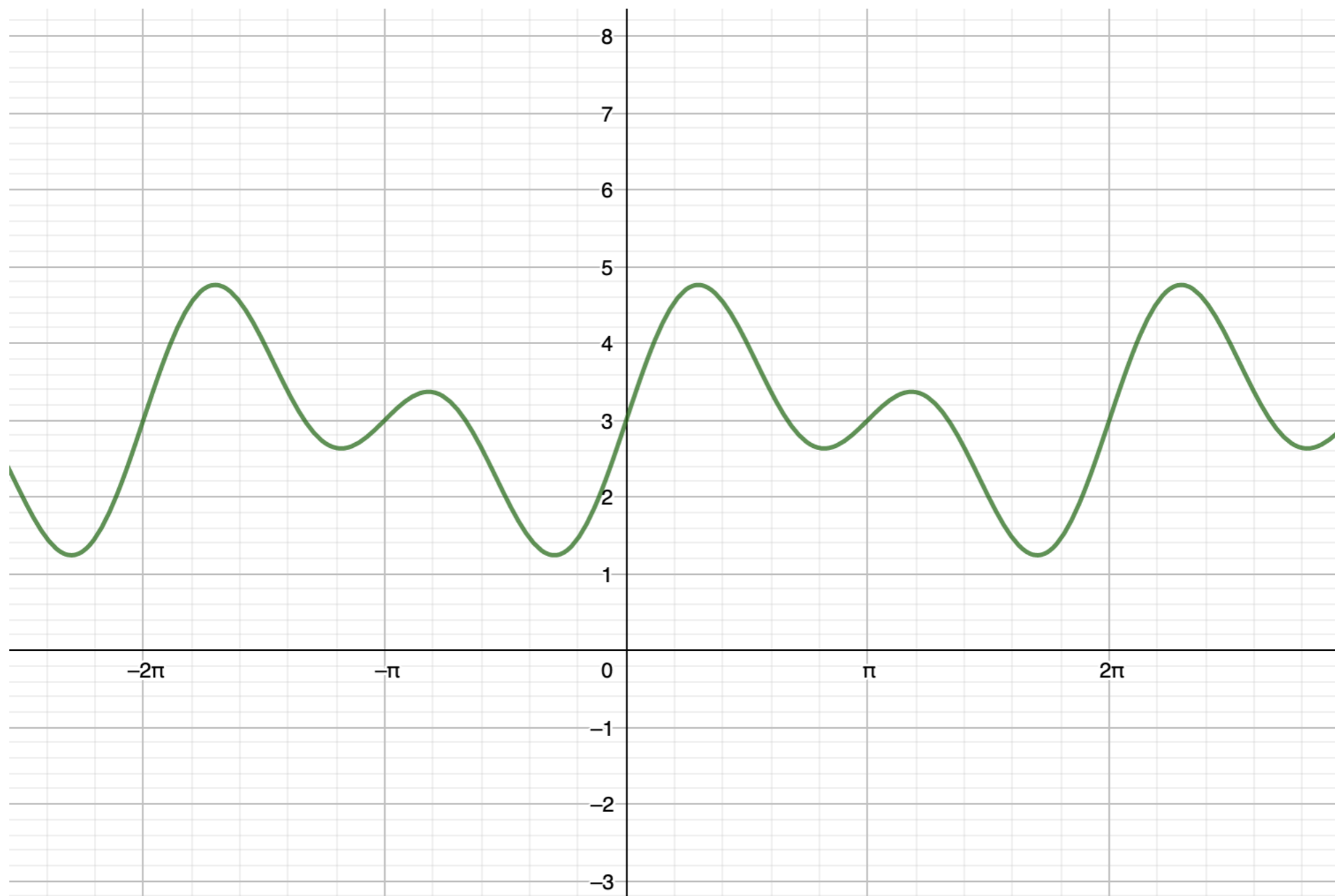
Exemple

Déterminons les points de maximum et minimum locaux de la fonction donnée par

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x.$$

Exercice

Pouvez-vous identifier l'un des points d'inflexion sur le graphe de la fonction $f(x) = \sin(2x) + \sin(x) + 3$?



Dérivée d'ordre supérieur

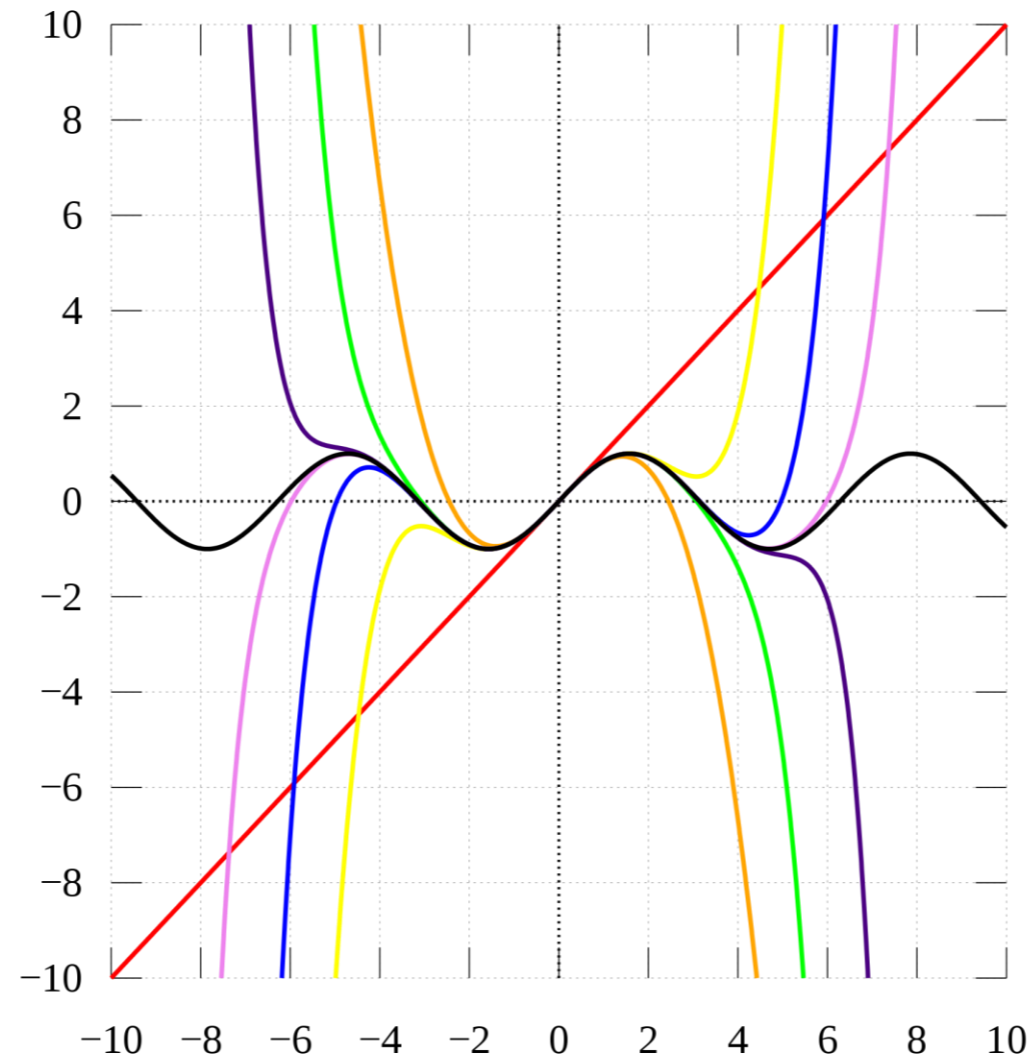
- ❖ La dérivée d'une fonction dérivable f est aussi une fonction. On peut donc la dériver à son tour. Nous avons défini la **dérivée seconde de la fonction f** comme la **dérivée de la dérivée**.
- ❖ La dérivée de la dérivée seconde, si elle existe, est appelée **dérivée troisième de f** et on la note f''' ou $f^{(3)}$.
- ❖ La dérivée de la dérivée troisième, si elle existe, est appelée **dérivée quatrième de f** et on la note $f^{(4)}$.
- ❖ La dérivée de la dérivée quatrième, si elle existe, est appelée **dérivée cinquième de f** et on la note $f^{(5)}$.
- ❖ On peut continuer ainsi et définir la **dérivée d'ordre n** (où $n \in \mathbb{N}$) comme la fonction que l'on obtient en dérivant la dérivée d'ordre $n - 1$, si cette dérivée existe :

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}$$

Dérivées d'ordres supérieurs

Exemple

1. Calculer les dérivées d'ordre n de la fonction $f(x) = \ln(1 + x)$



Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Polynômes de Taylor

Philippe Chabloz

Dérivées d'ordre supérieur et série de Taylor

Nous avons déjà rencontré dans ce cours des sommes infinies (séries) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$



Brook Taylor
1685 - 1731

Vers 1715 Brook Taylor trouve une méthode qui fournit des sommes infinies. Aujourd'hui, ces séries sont connues sous son nom.

Introduction

Si on note $f(x) = x^4$

Alors $f'(x) = 4x^3$ $f''(x) = 12x^2$ $f'''(x) = 24x$ et $f^{(4)}(x) = 24 = 4!$

Et donc en $x_0 = 0$ on a

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = 0 \quad f^{(4)}(0) = 24 = 4!$$

La fonction

$$M_n(x) = x^n$$

a donc toutes ses dérivées qui valent 0 en $x_0 = 0$ sauf celle d'ordre n qui vaut $n!$

Généralisation autour de $x = x_0$

La fonction

$$M_n(x) = (x - x_0)^n$$

a toutes ses dérivées qui valent 0 en $x = x_0$ sauf la dérivée d'ordre n qui vaut $n!$

Domination : introduction

Si x est proche de 0, le terme $10x^3$ est dominé par le terme $2x^2$. En effet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} 5x = 0.$$

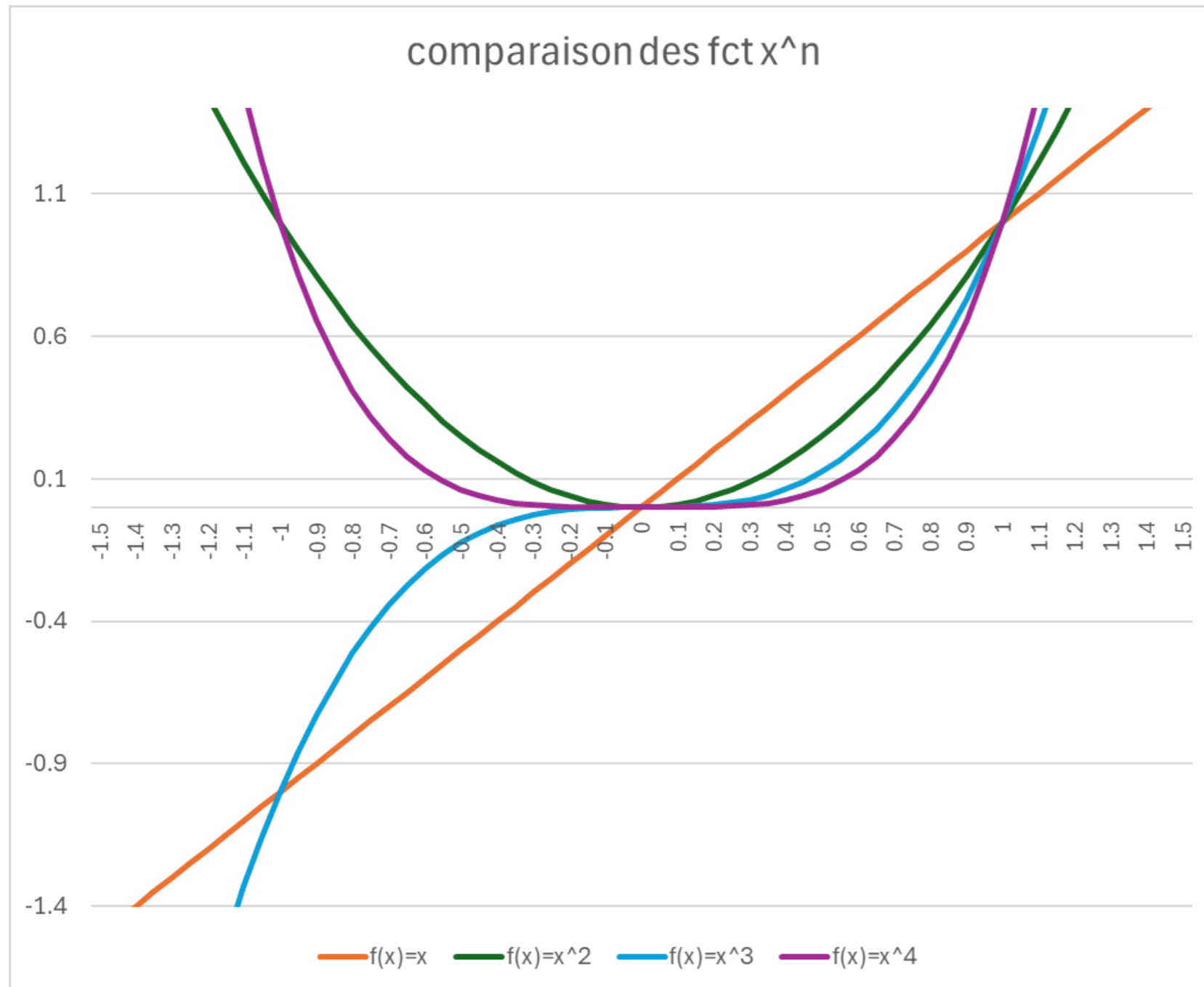
Termes dominants

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 + 2x^2 - 5x}{2x^3 - 40x^2 + 4x} = \frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 + 2x^2 - 5x}{2x^3 - 40x^2 + 4x} = -\frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 3x^2 + 1000x^3}{4x - x^2 + 450x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (3 - 3x + 1000x^2)}{x \cdot (4 - x + 450x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3x + 1000x^2}{4 - x + 450x^3} = \frac{3}{4}$$

Domination : introduction



Au voisinage de 0 on a les dominations suivantes

$$x \gg x^2 \gg x^3 \gg x^4$$

C'est le contraire de ce qui se passe au voisinage de $\pm\infty$

Approximation linéaire

- ❖ Soit f une fonction continue dans un intervalle réel I et dérivable en $x_0 \in I$. La tangente au graphe de f en x_0 est la droite d'équation

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- ❖ Le polynôme $T_1(x)$ est le seul polynôme de degré 1 vérifiant

$$\begin{cases} T_1(x_0) = f(x_0) \\ T_1'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

et il correspond à la *meilleure approximation linéaire* de f autour de x_0 :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} \quad \text{pour } x \text{ proche de } x_0.$$

Approximation quadratique

- ❖ Si f est deux fois dérivable en x_0 , on peut chercher un polynôme $T_2(x)$ de degré 2 vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} T_2(x_0) = f(x_0) \\ T_2'(x_0) = f'(x_0) \\ T_2''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

- ❖ Ce polynôme est égal à

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

et $T_2(x)$ est la *meilleure approximation quadratique* de f autour de x_0 :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}_{T_2(x)} \quad \text{pour } x \text{ proche de } x_0.$$

Polynômes de Taylor

- ❖ Soit f une fonction dérivable n fois en x_0 , son **polynôme de Taylor d'ordre n en x_0** , noté $T_n(x)$ ou $T_n(f, x_0)(x)$, est l'unique polynôme de degré n vérifiant les conditions

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

En x_0 la fonction f et le polynôme T_n prennent la même valeur. Les deux fonctions prennent également la même valeur pour les n premières dérivées calculées en x_0 . Le polynôme $T_n(x)$ est en ce sens la *meilleure approximation d'ordre n* de f autour de x_0 .

- ❖ Ce polynôme est égal à

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

qui s'écrit aussi, de manière plus compacte comme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Polynômes de Taylor

Remarque d'abord que le polynôme de Taylor $T_n(x)$ étant de degré n , ses dérivées d'ordres strictement supérieurs à n valent toutes 0.

Si on note
$$M_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

le terme d'ordre n (monôme de degré n), alors on a évidemment que

$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + M_n(x).$$

Or on peut vérifier que
$$M_n(x_0) = M'_n(x_0) = \dots = M_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

et que

$$M_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

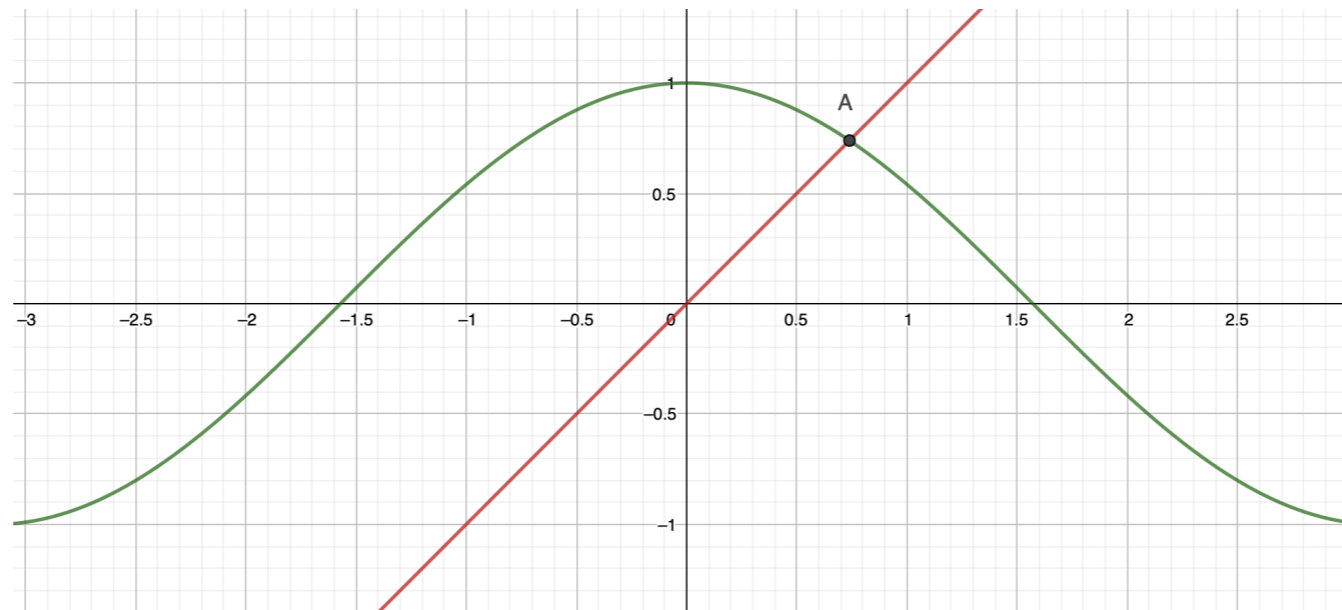
L'ajout du terme $M_n(x)$ au polynôme de Taylor d'ordre $n - 1$ pour obtenir le polynôme de Taylor d'ordre n **ne modifie donc pas les dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$** et **rajoute une dérivée d'ordre n qui vaut exactement ce que l'on veut, c'est-à-dire $f^{(n)}(x_0)$.**

Exercice

Déterminer une solution approchée de l'équation

$$\cos(x) = x$$

en utilisant une approximation d'ordre 2 de la fonction $f(x) = \cos(x)$ autour de $x_0 = 0$.



Séries de Taylor

Soit f une fonction *infiniment dérivable* en un point $x_0 \in \mathcal{D}_f$ (c-à-d $f^{(n)}(x_0)$ existe pour chaque $n \in \mathbb{N}$) alors la **série de Taylor de f** en x_0 est la fonction définie par

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

- ❖ L'égalité dans la formule précédente (*car il s'agit bien d'une égalité*) est valable pour x dans un intervalle centré en x_0 et donc de la forme

$$]x_0 - R, x_0 + R[.$$

Le nombre R est le rayon de convergence de la série de Taylor.

- ❖ Géométriquement, l'idée des séries de Taylor est d'approximer *au plus près* la fonction f en un point x_0 par le biais de polynômes où les coefficients sont donnés par une expression contenant les valeurs de dérivées de f calculées en x_0 .

Série de Taylor

Exercices

1. Calculer la série de Taylor de la fonction $f(x) = \ln(1 + x)$ en $x_0 = 0$
2. Calculer la série de Taylor de $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$ et comparer avec la définition de e^x

Domination : introduction

Si x est proche de 0, le terme $10x^3$ est dominé par le terme $2x^2$. En effet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} 5x = 0.$$

Termes dominants

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 + 2x^2 - 5x}{2x^3 - 40x^2 + 4x} = \frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 + 2x^2 - 5x}{2x^3 - 40x^2 + 4x} = -\frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 3x^2 + 1000x^3}{4x - x^2 + 450x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (3 - 3x + 1000x^2)}{x \cdot (4 - x + 450x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3x + 1000x^2}{4 - x + 450x^3} = \frac{3}{4}$$

Notation de Landau

Si une fonction $f(x)$ est négligeable devant une fonction $g(x)$ au voisinage de $x = a$, on notera

$$f = o(g) \quad (x \rightarrow a)$$

Ceci revient à dire que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemples

Au **voisinage de 0** on a

1. $4x^3 = o(x^2)$ car si x tend vers 0 alors $\frac{4x^3}{x^2} = 4x$ tend vers 0.

2. $2x^2 - 5x^3 + 100x^4 = o(x)$

3. $1 - \cos(x) = o(x)$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$ (règle de l'Hospital)

Au **voisinage de l'infini** on a

4. $x^2 = o(x^3)$

5. $x^n = o(e^x)$

6. $\ln^\alpha(x) = o(x^\beta)$ pour $\beta > 0$

Règles de calculs avec les o

- Les constantes peuvent être remplacées par 1 $c \cdot o(f) = o(f)$

Exemples $o(3x^2) = o(x^2)$ $-4o(x^6) = o(x^6)$

- $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$

Exemple $o(x^2) \cdot o(x^3) = o(x^5)$

- $f \cdot o(g) = o(fg)$

Exemple $x^2 \cdot o(x^3) = o(x^5)$

- $o(f) \pm o(f) = o(f)$

Exemple $o(x^3) - o(x^3) = o(x^3)$ (et PAS 0 !!)

Au voisinage de 0 on a

$$x^m = o(x^n) \quad \text{si } m > n$$

Le degré le plus PETIT domine

Au voisinage de $\pm \infty$ on a

$$x^n = o(x^m) \quad \text{si } m > n$$

Le degré le plus GRAND domine

Développement limité

On dit que $f(x)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $x = a$ si on peut écrire

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) = o[(x - a)^n]$$

Exemples

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ au voisinage de 0

2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots = x + o(x^2)$ au voisinage de 0 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$

3. $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ au voisinage de 0

4. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ au voisinage de 0

Développement limité et limite

Calculer la limite suivante en utilisant le développement limité du sinus et du cosinus en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \cdot (1 - \cos x^2)}{x^6} =$$

Développement limité et extrema

Soit f une fonction admettant au voisinage de $x = a$ le développement limité suivant

$$f(x) = f(a) + c_n \cdot (x - a)^n + o[(x - a)^n]$$

avec $c_n \neq 0$ et $n > 1$ (le premier terme non nul et non constant est de degré $n > 1$).

Par hypothèse, le terme linéaire $(x - a)$ est nul (car $n > 1$) et donc $f'(a) = 0$. Le point $x = a$ est donc un point stationnaire

1. Si n est pair et $c_n > 0$ alors a est un **minimum local**;
2. si n est pair et $c_n < 0$ alors a est un **maximum local**;
3. si n est impair, alors a est un **plat** et un **point d'inflexion**.

Exemples: