

Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Philippe Chabloz

Formules de De Moivre

Les formules suivantes apparaissent dans l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler qui les a démontrées, pour tout entier naturel n , en 1748. Mais elles apparaissent de manière implicite chez Abraham de Moivre à plusieurs reprises à partir de 1707, dans ses travaux sur les racines n -ièmes de nombres complexes.

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sin x)^k (\cos x)^{n-k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$
$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sin x)^k (\cos x)^{n-k} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

La version avec l'exponentielle complexe est beaucoup plus simple et se déduit immédiatement:

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Série de Taylor du cosinus

Formule d'Euler pour $i\alpha$:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Formule d'Euler pour $-i\alpha$:

$$e^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i \cdot \sin(-\alpha) = \cos \alpha - i \cdot \sin \alpha$$

En additionnant les 2 lignes et en divisant par 2 on obtient

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

De même en soustrayant la 2^{ème} ligne à la 1^{ère} puis en divisant par $2i$ on obtient:

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$e^x = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{x^z}{z!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

En utilisant la série de l'exponentielle dans la formule du **cosinus** ci-dessus on obtient

$$\cos x = \frac{1}{2} \cdot [e^{ix} + e^{-ix}] = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{(ix)^z}{z!} + \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(-ix)^z}{z!} \right] = 1 + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \frac{i^6 x^6}{6!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Série de Taylor du sinus

En utilisant la série de l'exponentielle dans la formule du **sinus** ci-dessus on obtient

$$\sin x = \frac{1}{2i} \cdot [e^{ix} - e^{-ix}] = \frac{1}{2i} \cdot \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} - \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \right] = x + \frac{i^3 x^3}{i 3!} + \frac{i^5 x^5}{i 5!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Série de Taylor pour sinus et cosinus

La série de Taylor au point a d'une fonction indéfiniment dérivable f en ce point est une série entière $\sum c_n(x - a)^n$ construite à partir de f et de ses dérivées successives en a . Une fonction f est dite *analytique* en a quand cette série coïncide avec f au voisinage de a .

On peut définir les fonctions trigonométriques à l'aide de séries entières :



Brook Taylor
1685 - 1731

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Nous avons déjà rencontré une autre série de Taylor. En effet, nous avons montré que pour la fonction exponentielle :

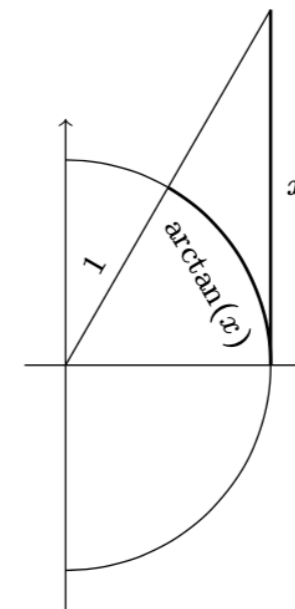
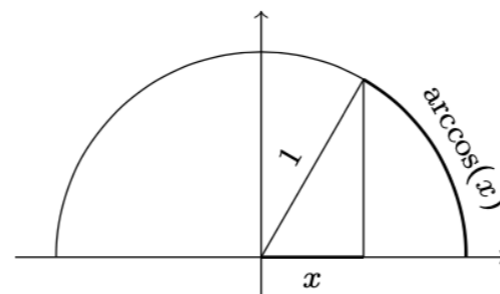
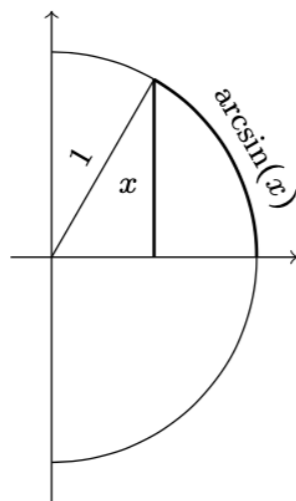
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Les fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions réciproques des fonctions sinus, cosinus et tangente sont appelées **arcsin**, **arccos** et **arctan**.

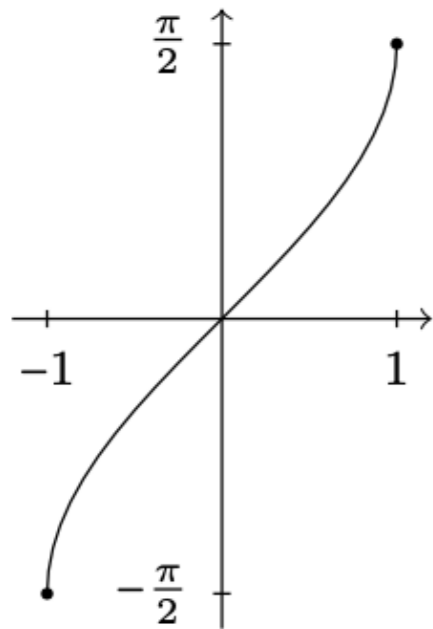
Pour définir ces fonctions réciproques, on doit restreindre chaque fonction trigonométrique à un intervalle sur lequel elle est **bijection**.

- ❖ l'**arcsin** d'un nombre réel compris entre -1 et 1 est l'unique mesure d'angle en radians **entre $-\pi/2$ et $\pi/2$** dont le **sinus** vaut ce nombre.
- ❖ l'**arccos** d'un nombre réel compris entre -1 et 1 est l'unique mesure d'angle en radians **entre 0 et π** dont le **cosinus** vaut ce nombre.
- ❖ l'**arctan** d'un nombre réel compris est l'unique mesure d'angle en radians **entre $-\pi/2$ et $\pi/2$** dont la tangente vaut ce nombre.



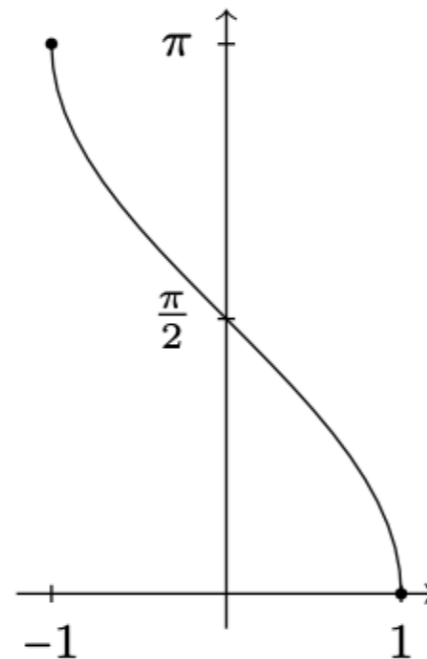
Graphiques des fonctions trigonométriques réciproques

$$\arcsin: [-1,1] \mapsto \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



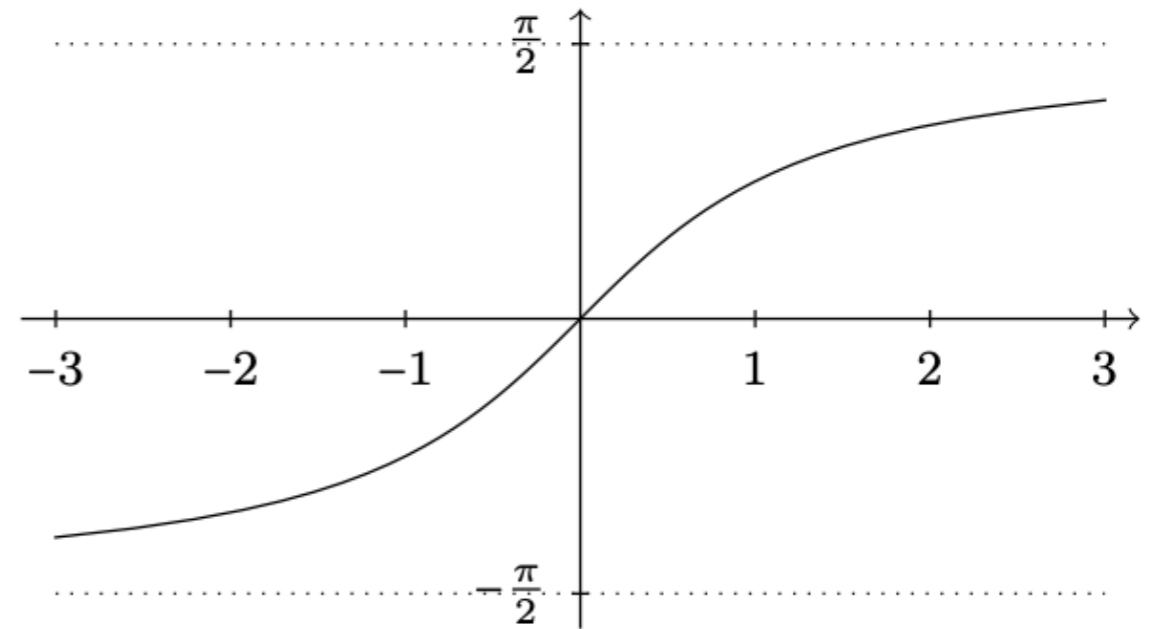
$\arcsin(x)$

$$\arccos: [-1,1] \mapsto [0, \pi]$$



$\arccos(x)$

$$\arctan: \mathbb{R} \mapsto \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$



$\arctan(x)$

$\arcsin(\sin x) = x$ seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ET $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout $x \in [-1, 1]$



Trigonométrie dans un triangle quelconque

Théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Théorème de l'aire

$$\text{Aire}\Delta = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha)$$

$$\text{Aire}\Delta = \frac{1}{2}ac \sin(\beta)$$

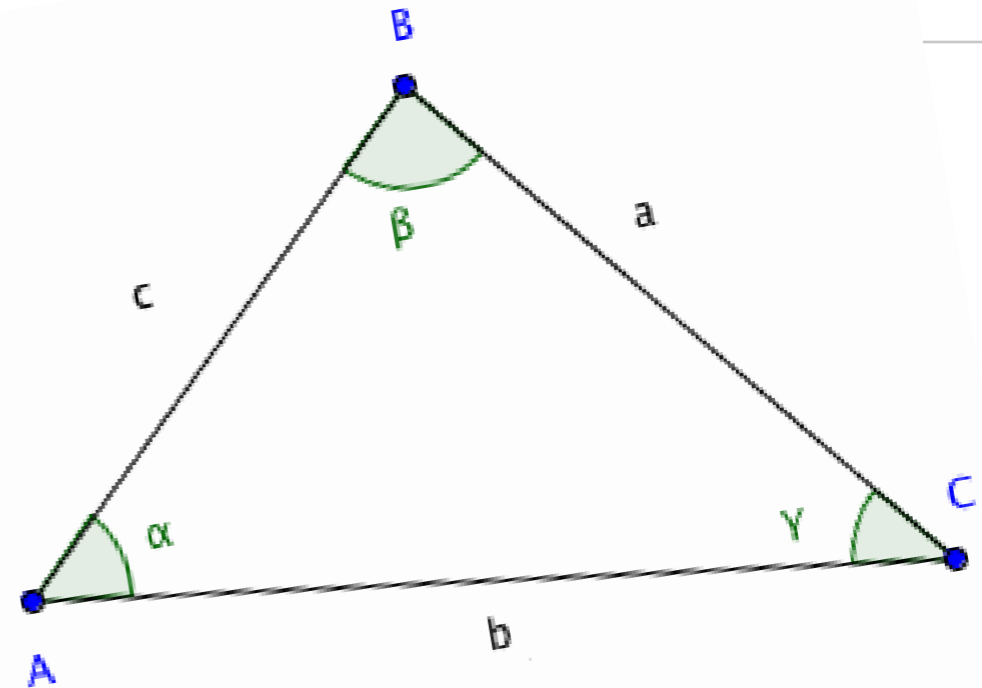
$$\text{Aire}\Delta = \frac{1}{2}ab \sin(\gamma)$$

Théorème du cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

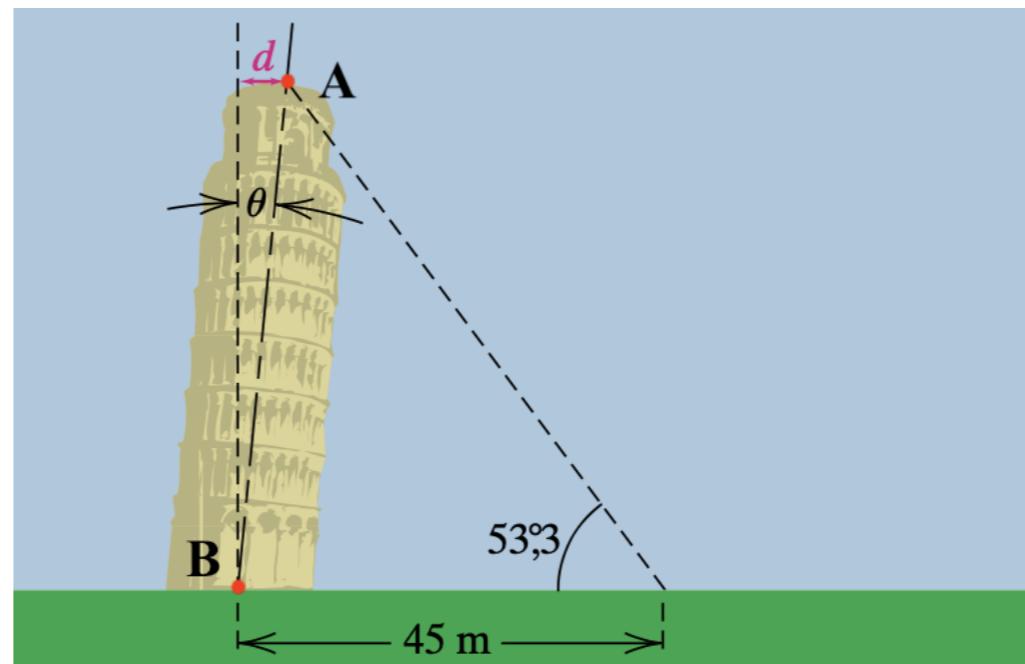


- ❖ Un triangle est complètement déterminé dans les cas suivants :
 1. On en connaît **un côté et deux angles** (théorème du sinus).
 2. On en connaît **deux côtés et un angle opposé à l'un d'entre eux** (théorème du sinus).
 3. On en connaît **deux côtés et l'angle compris** entre ces deux côtés (théorème du cosinus).
 4. On en connaît **trois côtés** (théorème du cosinus).
- ❖ On peut calculer l'aire sans connaître la hauteur (théorème de l'aire).

Exercice

À l'origine, la tour de Pise était perpendiculaire à la surface du sol et mesurait 54 m de haut. Maintenant, elle penche d'un angle θ par rapport à la perpendiculaire, comme le montre la figure ci-dessous. Lorsque le sommet de la tour est observé à partir d'un point distant de 45 m du centre de sa base, l'angle d'élévation est de 53.3° .

- Calculer l'angle θ .
- Calculer la hauteur de la tour inclinée.
- Calculer la distance d qui exprime de combien le centre du sommet de la tour s'est éloigné de la perpendiculaire.



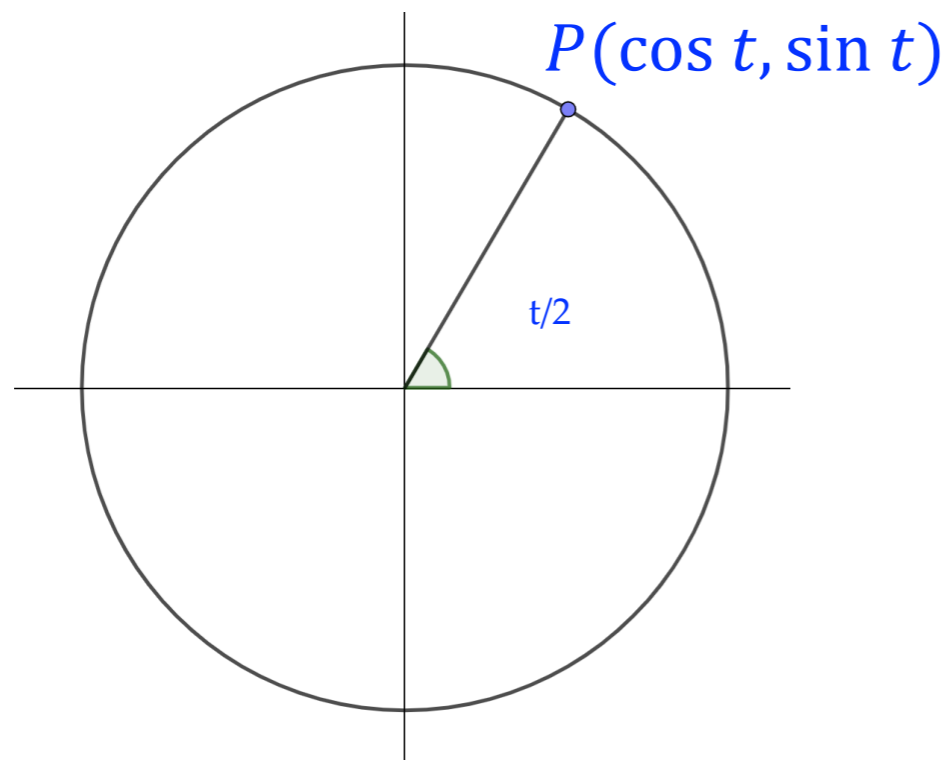
Cercle et hyperbole

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$

un cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$. Alors le point

$$P(\cos t, \sin t)$$

est un point sur le cercle C qui détermine une surface égale à $t/2$ avec l'axe Ox .

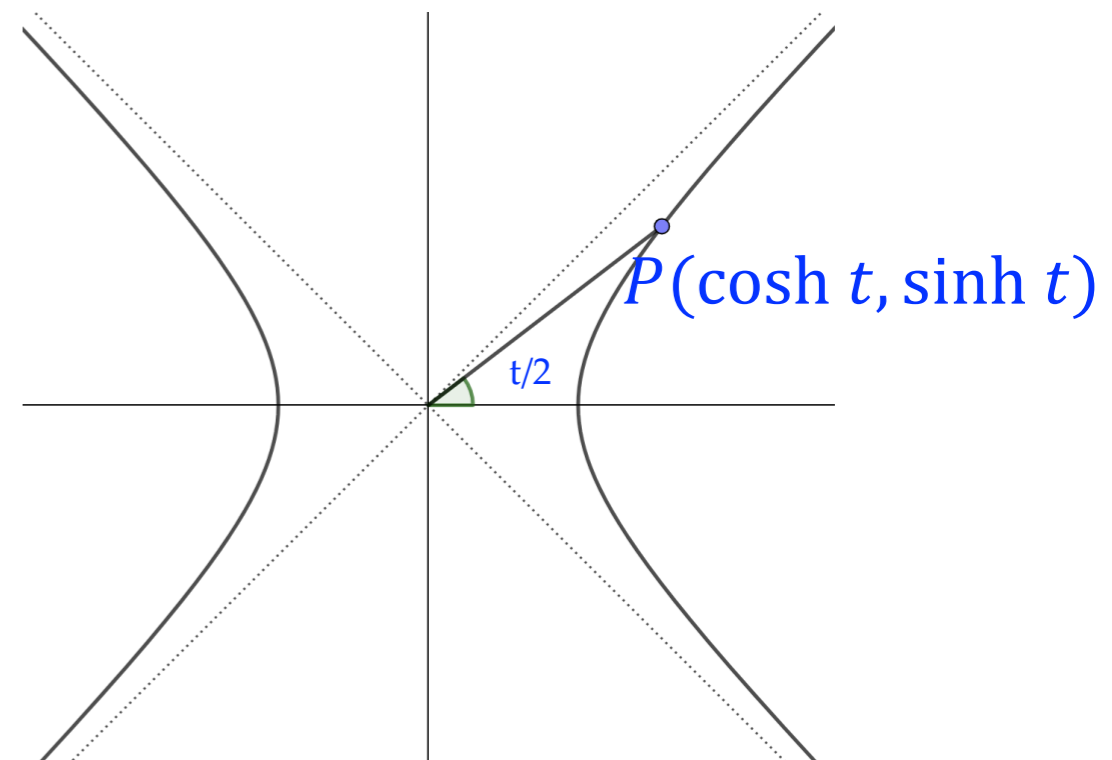


Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 - y^2 = 1\}$

une hyperbole centrée en $(0,0)$. Alors

$$P(\cosh t, \sinh t)$$

est un point sur l'hyperbole H qui détermine une surface égale à $t/2$.



Les fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont analogues aux fonctions trigonométriques, mais le paramètre x ne peut pas être interprété comme un angle. Ce sont les fonctions :

❖ Sinus hyperbolique :

Défini comme étant la partie **impaire** de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

❖ Cosinus hyperbolique

Défini comme étant la partie **paire** de la fonction exponentielle, c'est-à-dire par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

❖ Tangente hyperbolique

Défini comme le **rapport** entre les sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique, c'est-à-dire par :

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Propriétés des fonctions hyperboliques

- ❖ Les sinus et cosinus hyperboliques vérifient l'identité suivante :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

- ❖ La fonction \sinh est impaire et $\sinh(0) = 0$.
- ❖ La fonction \cosh est paire et admet 1 pour minimum en $x = 0$.
- ❖ La fonction cosinus hyperbolique est convexe. Elle intervient dans la définition de la *chaînette*, laquelle correspond à la forme que prend un câble suspendu à ses extrémités et soumis à son propre poids.
- ❖ *Les fonctions hyperboliques satisfont à des relations, très ressemblantes aux identités trigonométriques.*

