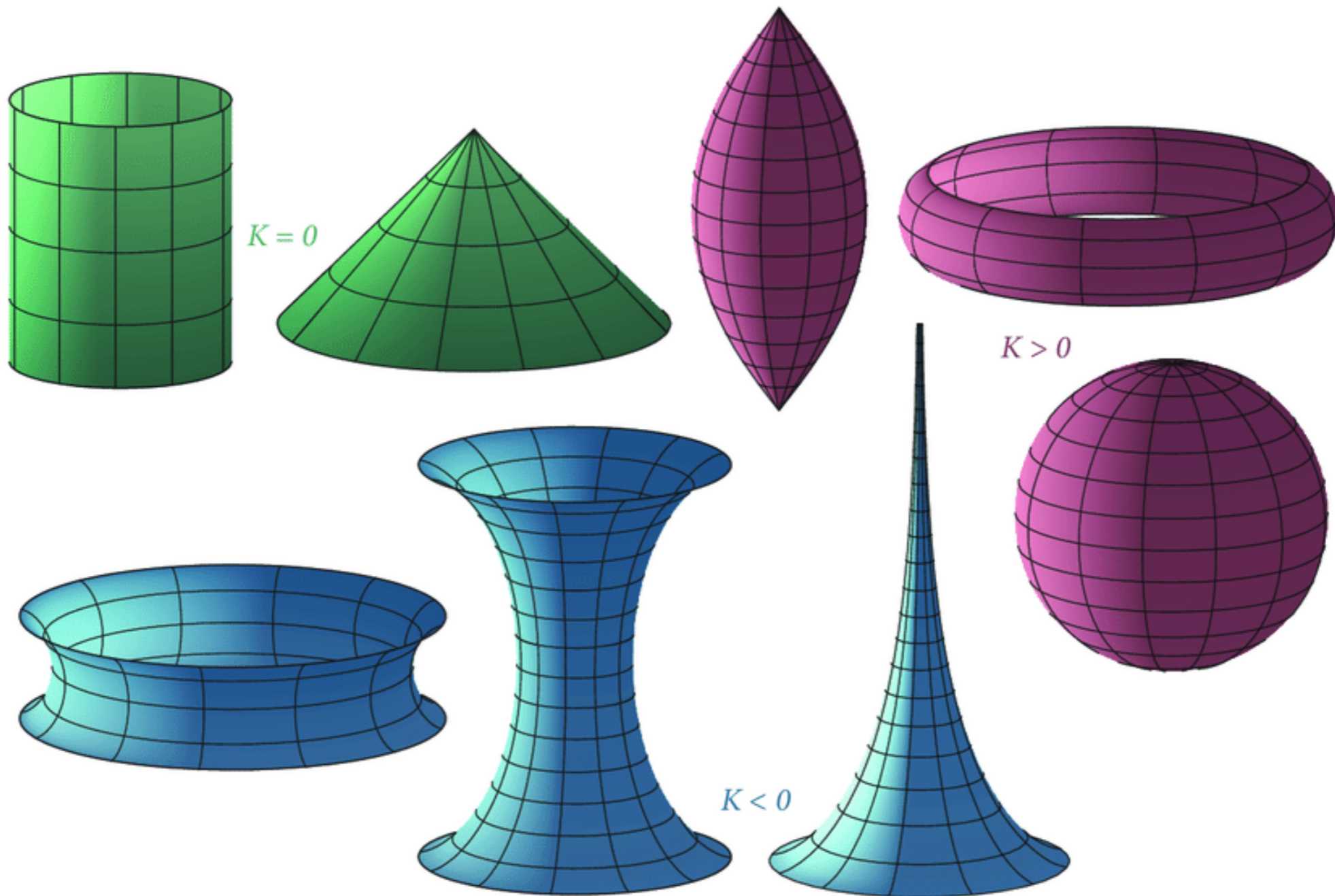


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Surfaces et volumes de révolution

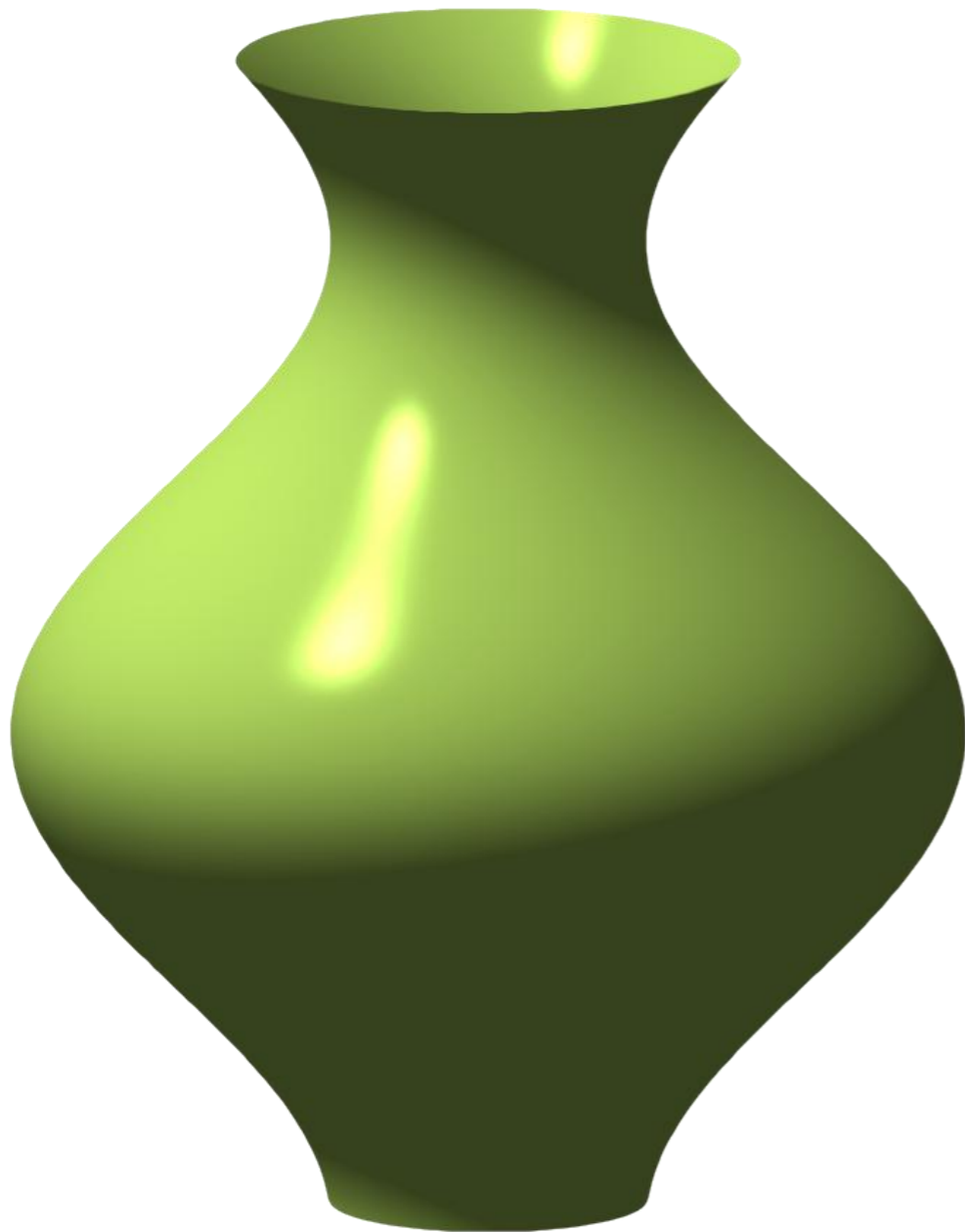
Philippe Chabloz

Surfaces de révolution





Surfaces de révolution

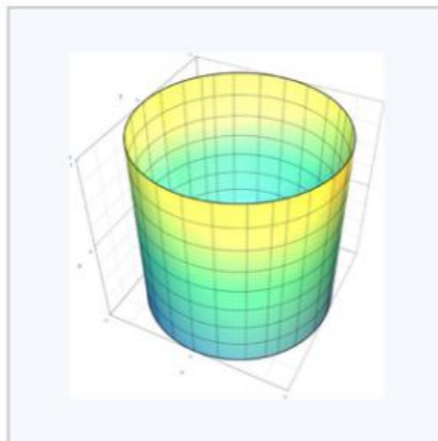


- ❖ Une surface de révolution est une surface de \mathbb{R}^3 , *invariante par rotation* autour d'un axe fixe.
- ❖ Une surface balayée par la rotation d'une courbe quelconque autour d'un axe fixe est une surface de révolution.
- ❖ Étant donnée une courbe C dans l'espace, on la fait *tourner* autour de l'axe Oz (*par exemple*) pour obtenir une surface de révolution.
- ❖ Soit $P \in C$ un point sur la courbe, si on regarde l'orbite de ce point, il s'agit d'un *cercle horizontal*) à la hauteur du point P .

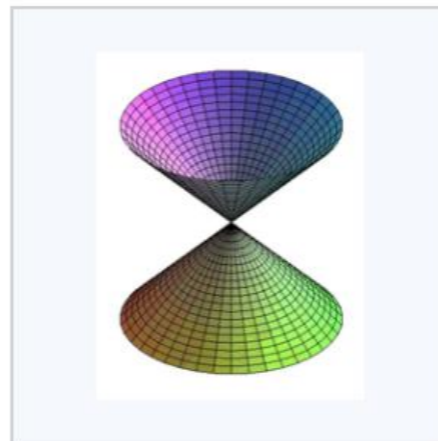
Équations paramétriques d'une surface de révolution

Soit C une courbe dans l'espace définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ où $t \in I$. La surface de révolution engendrée par la courbe C admettant l'axe Oz comme axe de rotation a équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t, \alpha) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \cos(\alpha) \\ y(t, \alpha) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \sin(\alpha) \\ z(t, \alpha) = z(t) \end{cases}, \quad \alpha \in [0, 2\pi], t \in I$$



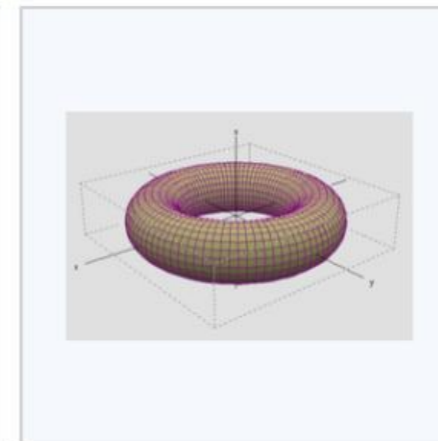
Cylindre.



Cône.



Sphère.



Tore

Surfaces de révolution

Si la **courbe γ est située dans le plan Oyz** alors les équations du slide précédent se simplifient en

❖ Pour la courbe

$$\gamma(t) = (0, y(t), z(t)) \quad t \in I$$

❖ Pour la surface de révolution

$$\Sigma(t, \alpha) = \begin{pmatrix} y(t) \cos \alpha \\ y(t) \sin \alpha \\ z(t) \end{pmatrix} \quad t \in I, \quad \alpha \in [0, 2\pi]$$

Dessin:

Exemple : équations de la sphère

Solide de révolution : aire et volume

Supposons que la courbe génératrice de la surface de révolution soit contenue dans le plan Oyz .

$$\gamma(t) = (0, y(t), z(t)) \quad t \in I$$

L'élément infinitésimal de longueur vaut alors

$$dl = \sqrt{dy^2 + dz^2} = \sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

La distance à l'axe Oz de cet élément infinitésimal vaut $y(t)$.

Sa rotation autour de Oz fait un cylindre de rayon $y(t)$ de hauteur dl .

Ainsi la surface latérale de cet élément infinitésimal vaut

$$dS = 2\pi \cdot y \cdot dl$$

Le volume de ce même cylindre infinitésimal vaut

$$dV = \pi \cdot y^2 dz$$

Solide de révolution : aire et volume

Élément différentiel de surface latérale: $dS = 2\pi \cdot y \cdot dl$

Élément différentiel du volume de révolution: $dV = \pi \cdot y^2 dz$

1. En intégrant dS on trouve l'aire de la surface de révolution:

$$S_{Oz}^{lat} = \int_a^b 2\pi \cdot y(t) \cdot dl = 2\pi \int_a^b y(t) \cdot \sqrt{dy^2 + dz^2} = 2\pi \int_a^b y(t) \cdot \sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

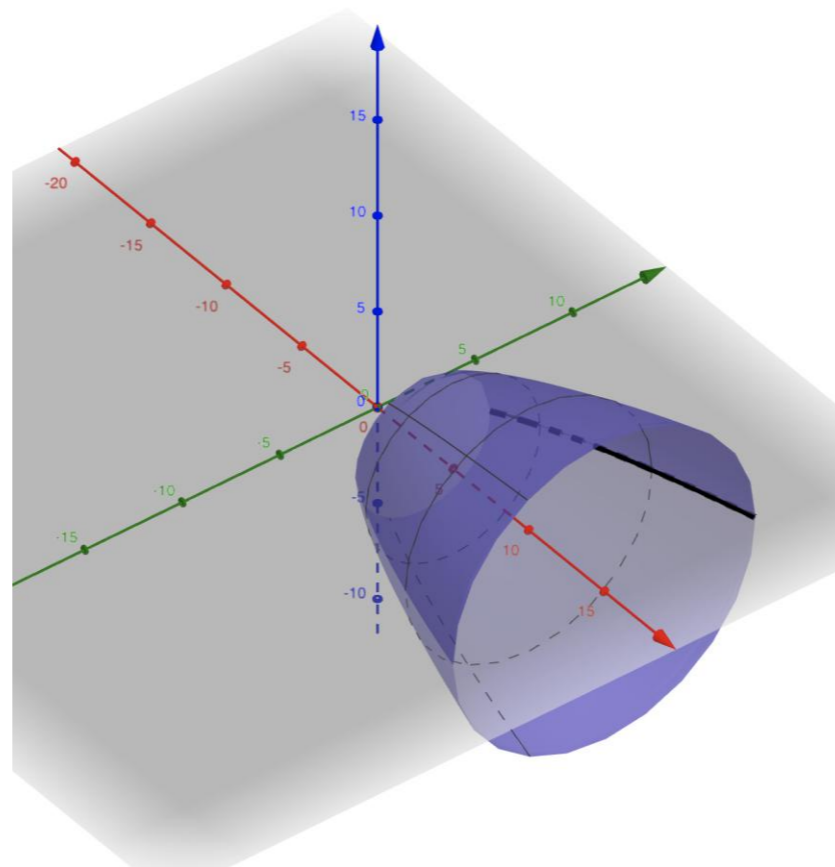
2. En intégrant dV on trouve le volume du solide de révolution

$$V_{Oz} = \int_a^b \pi y(t)^2 dz = \pi \int_a^b y(t)^2 \cdot z'(t) dt$$

entre $P(0, y(a), z(a))$ et $R(0, y(b), z(b))$.

Exercice

Évaluer l'aire de la surface de révolution obtenue par la rotation autour de l'axe Ox de la courbe définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$ pour $x \in [3,15]$.



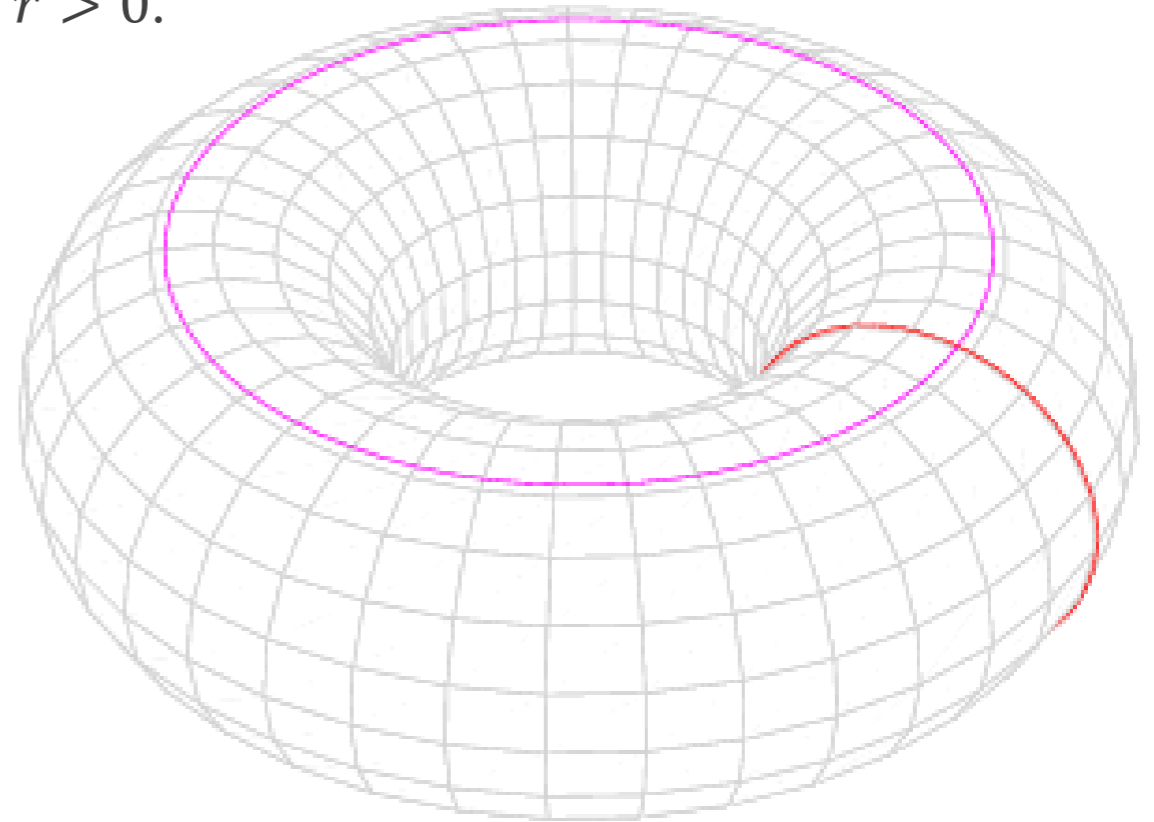
Exercice : ballon de rugby

Calculer le volume de l'ellipsoïde obtenu par rotation autour de l'axe Oz de la demi-ellipse de demi-axes a et b (ballon de rugby).

Demi-ellipse : $\gamma(t) = (0, a \sin t, -b \cos t) \quad 0 \leq t \leq \pi$

Exercice : le tore

Calculer la surface latérale du tore de paramètres $R > r > 0$.



Solide de base et de hauteur connues

Considérons un solide constitué d'une base et d'un sommet S relié à la base par des droites.

Pour simplifier les calculs on suppose le solide posé sur son sommet et la base horizontale. Soit B l'aire de la base et h la hauteur de la base (voir dessin à droite).

Alors pour tout $0 \leq z \leq h$ l'aire de la section horizontale de hauteur z vaut

$$B(z) = B \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2$$

Car une homothétie de rapport $\frac{z}{h}$ transforme les surfaces selon $\left(\frac{z}{h}\right)^2$

Alors le volume du solide vaut

$$V = \int_0^h B \cdot \left(\frac{z}{h}\right)^2 dz = \frac{B}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{B}{h^2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{B}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

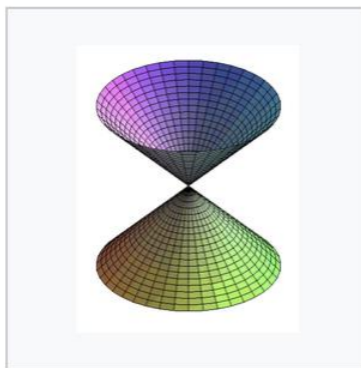
Applications:

- ❖ Volume d'un cône de rayon R et de hauteur h : $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$
- ❖ Volume d'une pyramide de base carrée : $V = \frac{1}{3} d^2 \cdot h$

Surfaces réglées

Une surface réglée est une surface par chaque point de laquelle passe une droite, appelée **génératrice**, contenue dans la surface.

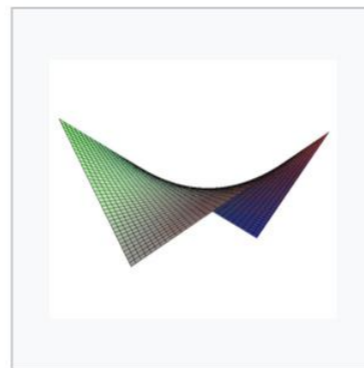
Une surface **doublement réglée** lorsque, par chacun de ses points, il y a deux droites distinctes qui passent par le point et appartiennent à la surface.



Cône.



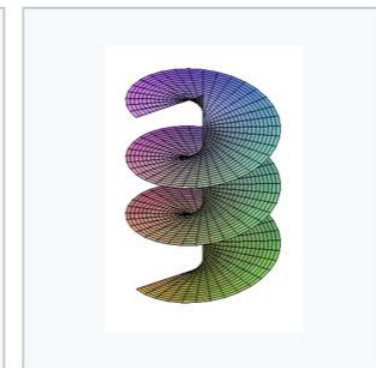
Cylindre.



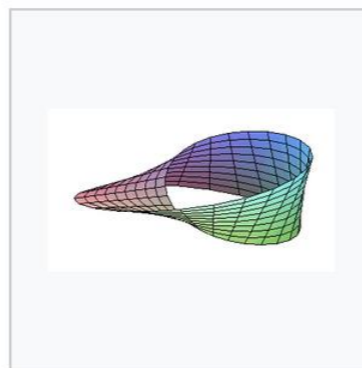
Paraboloïde
hyperbolique.



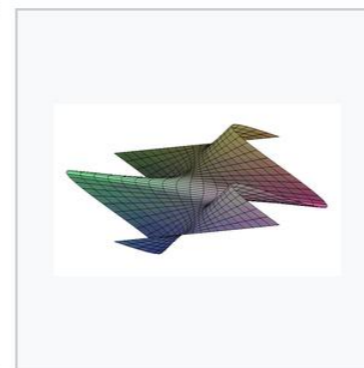
Hyperboloïde à une
nappe.



Hélicoïde.

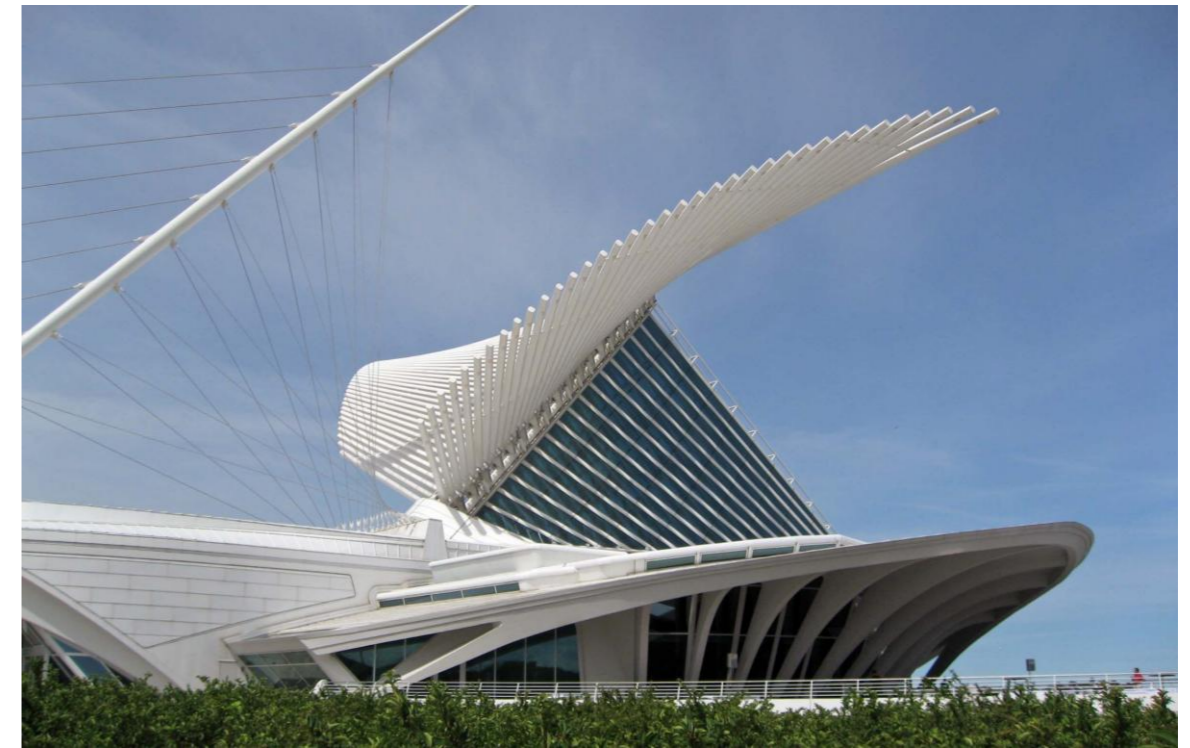


Ruban de Möbius.



Conoïde.

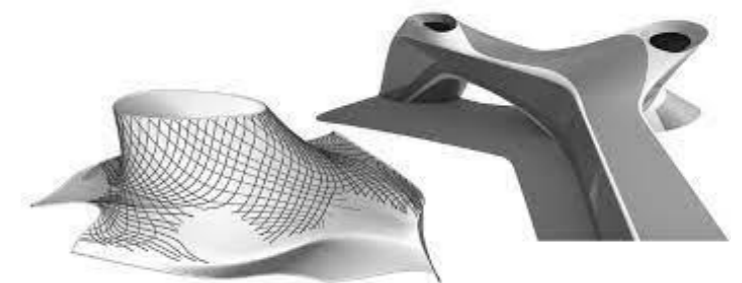
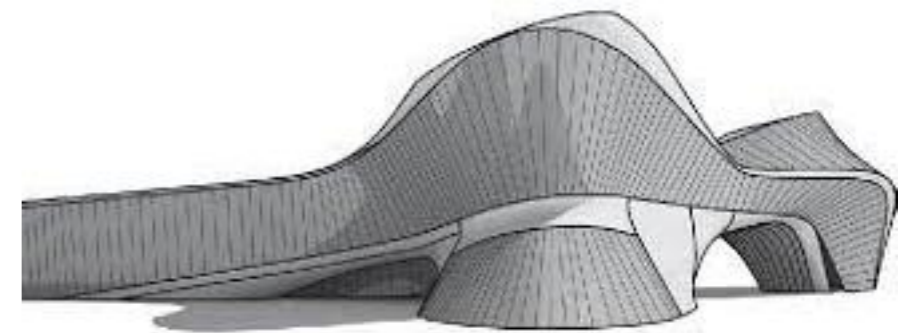
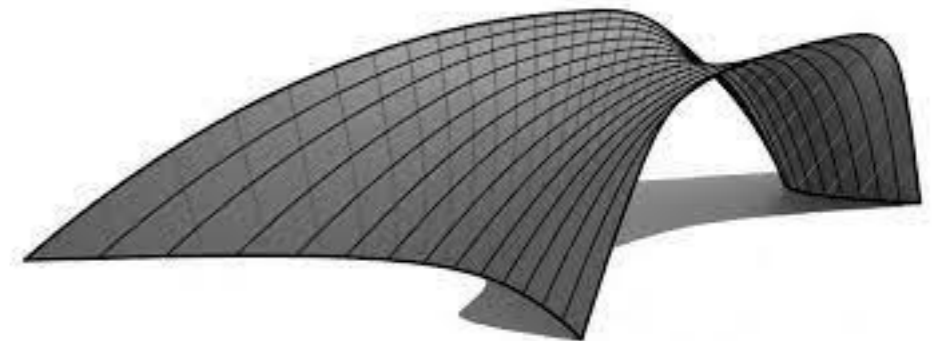
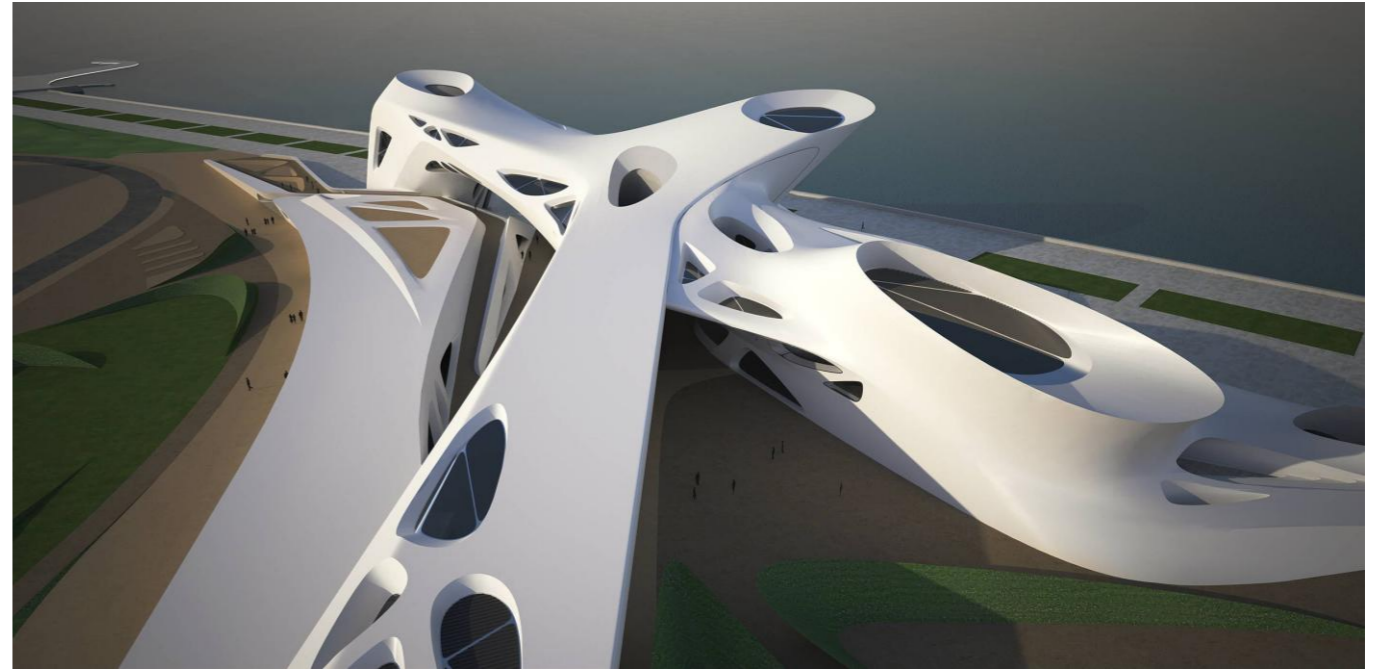
Milwaukee art museum
Santiago Calatrava



Frank
O. Gehry

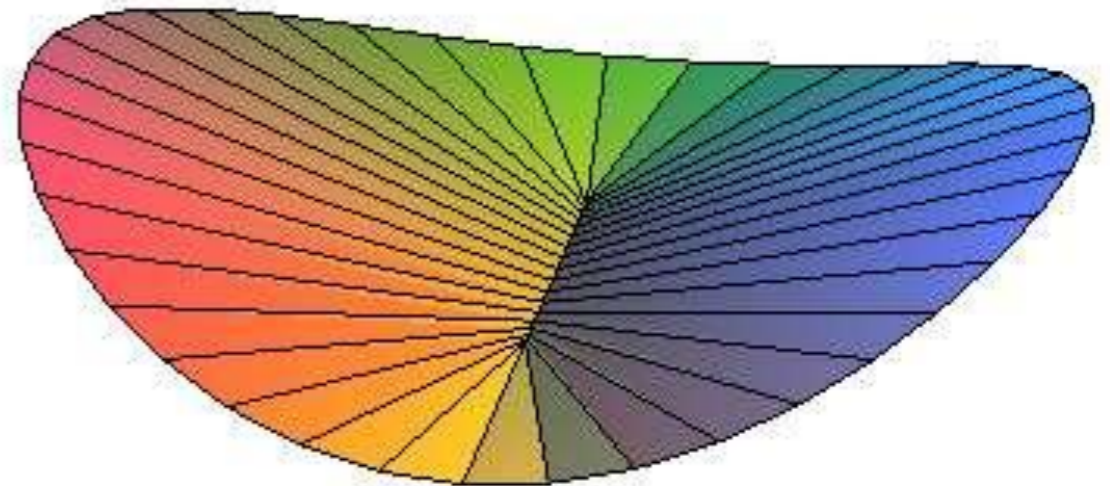
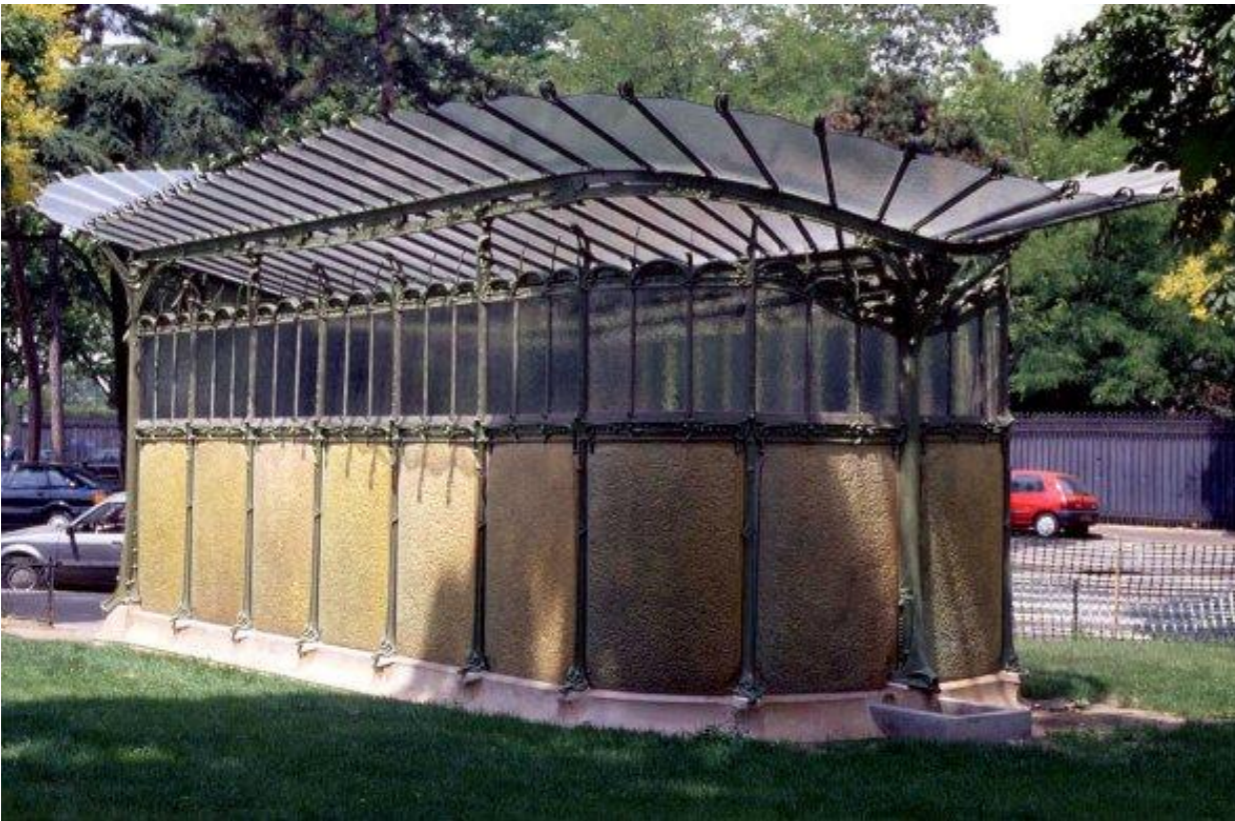


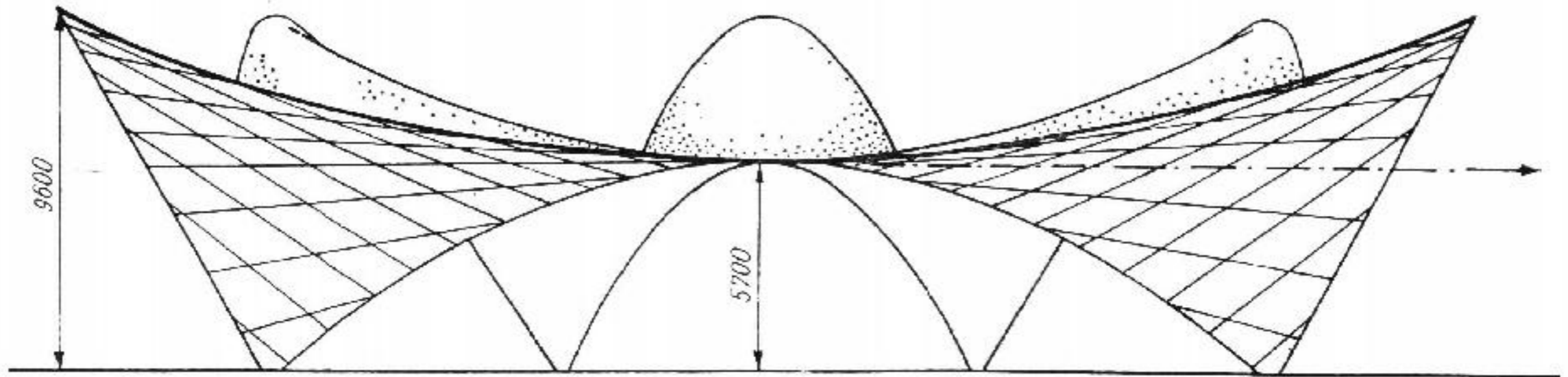
Cagliari contemporary
arts center
Zaha Hadid



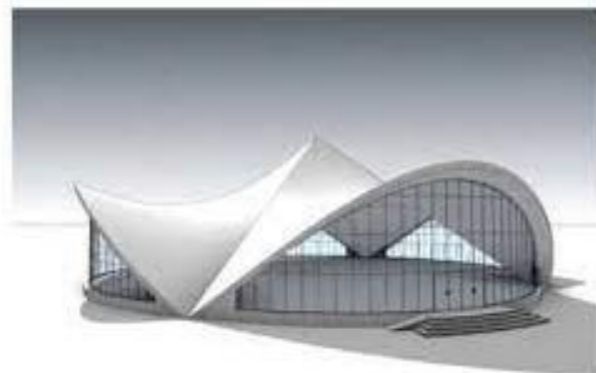
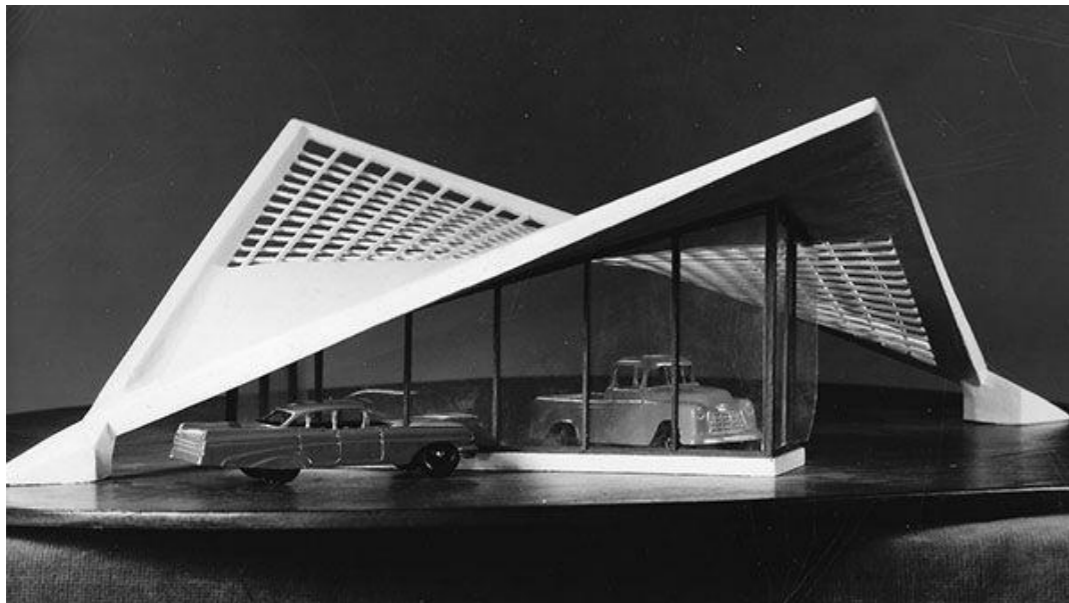
Surface de Guimard

Hector Guimard





En architecture, les surfaces réglées ont l'avantage de pouvoir être réalisées en béton via un coffrage linéaire. Les surfaces doublement réglées peuvent de plus être armées de tiges droites dans deux directions différentes.



Surfaces réglées

Pour définir une surface réglée, il faut deux courbes paramétrées dans l'espace :

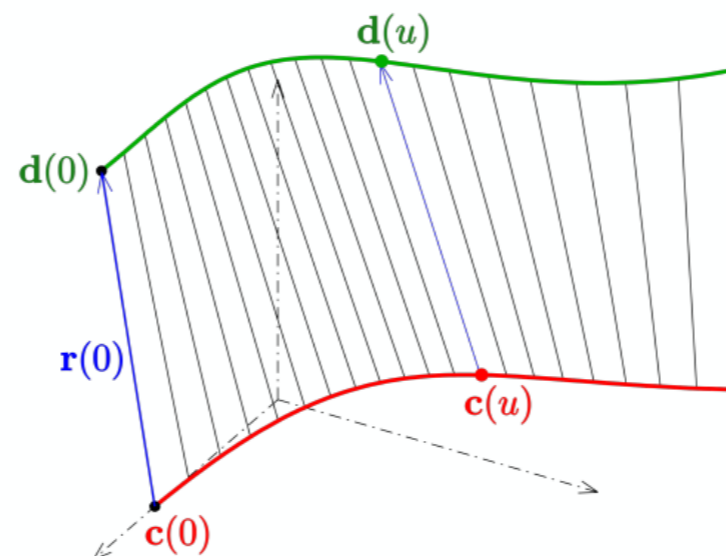
$$c(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \quad \text{et} \quad d(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) \quad \text{où } t \in I.$$

Pour t fixé, la droite entre les points $c(t)$ et $d(t)$ est donnée par l'équation paramétrique :

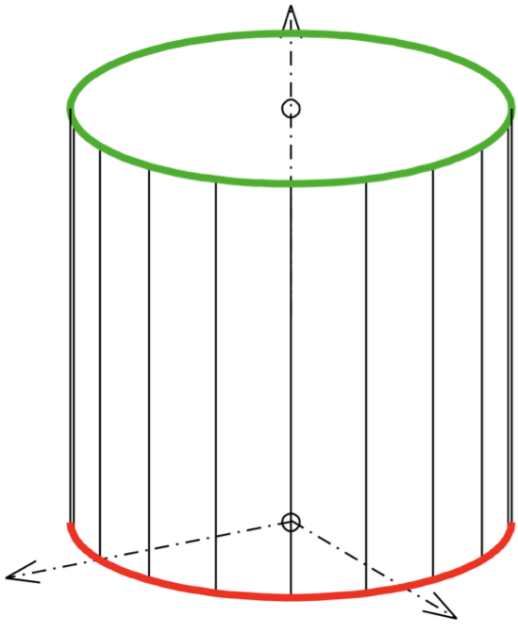
$$\gamma(s) = (1 - s)c(t) + s d(t) \quad \text{où } s \in \mathbb{R}.$$

Les droites de cette famille sont les générateurs de la surface réglée. En laissant varier t , on obtient une surface paramétrée par les paramètres $t \in I$ et $s \in \mathbb{R}$ d'équation :

$$r(s, t) = (1 - s)c(t) + s d(t) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(s, t) = (1 - s)x_1(t) + s x_2(t) \\ y(s, t) = (1 - s)y_1(t) + s y_2(t) \\ z(s, t) = (1 - s)z_1(t) + s z_2(t) \end{cases}$$



Exemples de surfaces réglées

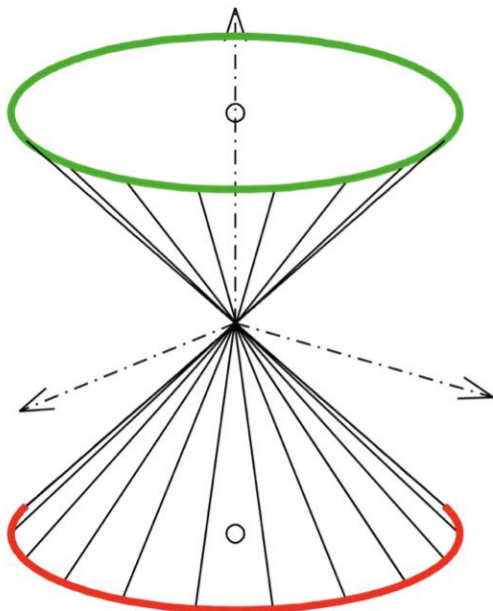


Si $c(t) = (\cos t, \sin t, -1)$ et $d(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$
on obtient un **cylindre droit** de rayon 1 :

$$\begin{cases} x(s, t) = (1 - s) \cdot \cos(t) + s \cdot \cos(t) = \cos(t) \\ y(s, t) = (1 - s) \cdot \sin(t) + s \cdot \sin(t) = \sin(t) \\ z(s, t) = (1 - s)(-1) + s = 2s - 1 \end{cases} \text{ où } t \in [0, 2\pi] \text{ et } s \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$r(t, s) = (\cos(t), \sin(t), 2s - 1)$$



Si $c(t) = (-\cos t, -\sin t, -1)$ et $d(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ $t \in [0, 2\pi]$
on obtient un **cône droit** :

$$\begin{cases} x(s, t) = (1 - s) \cdot \cos(t) + s \cdot \cos(t) = (2s - 1) \cdot \cos(t) \\ y(s, t) = (1 - s) \cdot \sin(t) + s \cdot \sin(t) = (2s - 1) \cdot \sin(t) \\ z(s, t) = (1 - s)(-1) + s = 2s - 1 \end{cases} \text{ où } t \in [0, 2\pi] \text{ et } s \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$r(t, s) = ((2s - 1) \cdot \cos(t), (2s - 1) \cdot \sin(t), 2s - 1)$$

Exemples de surfaces réglées

Généralisation : nous introduisons un paramètre supplémentaire $\varphi \in [0, 2\pi]$ permettant de faire varier la synchronisation des deux paramétrisations de deux cercles. Soient :

$$c(t) = (\cos(t - \varphi), \sin(t - \varphi), -1)$$

et

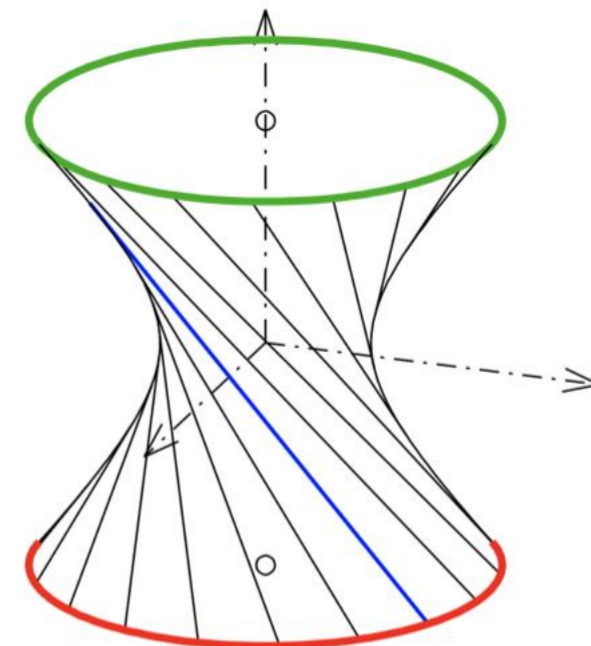
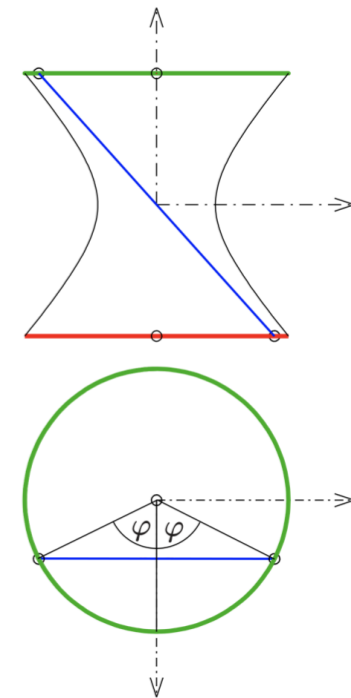
$$d(t) = (\cos(t + \varphi), \sin(t + \varphi), 1),$$

avec $t \in [0, 2\pi]$. Alors :

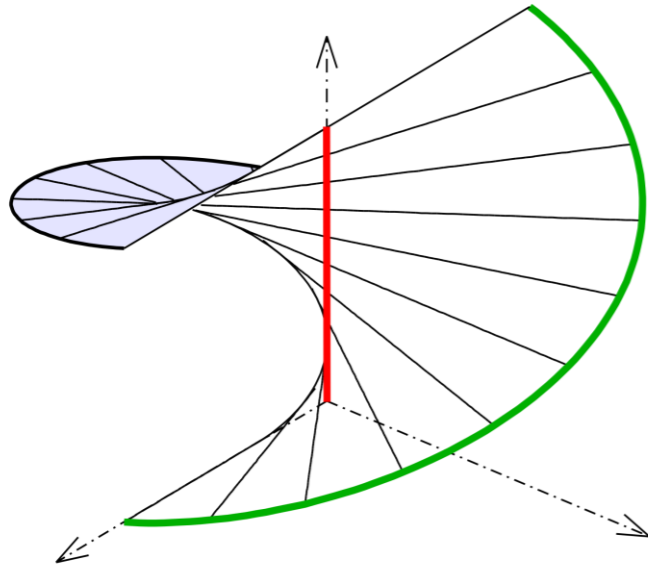
- ❖ Si $\varphi \in]0, \pi/2[$ on obtient un **hyperboloïde à une nappe** :

$$\begin{cases} x(s, t) = (1 - s) \cdot \cos(t - \varphi) + s \cdot \cos(t + \varphi) \\ y(s, t) = (1 - s) \cdot \sin(t - \varphi) + s \cdot \sin(t + \varphi) \\ z(s, t) = (1 - s) \cdot (-1) + s = 2s - 1 \end{cases}$$

- ❖ Si $\varphi = 0$ on obtient un **cylindre droit** de rayon 1.
- ❖ Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ on obtient un **cône droit** de rayon 1.



Exemples de surfaces réglées



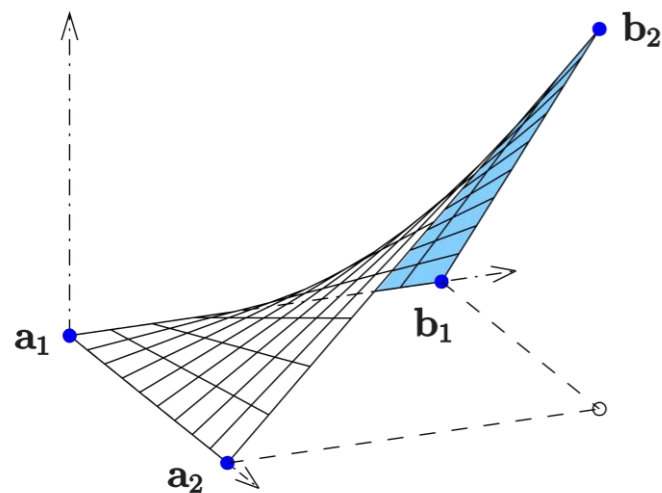
Si $c(t) = (0, 0, t)$ et $d(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $t \in \mathbb{R}$

on obtient un **hélicoïde** :

$$\begin{cases} x(s, t) = (1 - s) \cdot 0 + s \cdot \cos(t) = s \cdot \cos(t) \\ y(s, t) = (1 - s) \cdot 0 + s \cdot \sin(t) = s \cdot \sin(t) \\ z(s, t) = (1 - s) \cdot t + st = t \end{cases} \quad \text{où } s, t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$r(t, s) = (s \cdot \cos(t), s \cdot \sin(t), t)$$



Soient $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ quatre points dans l'espace tels que les deux droites

$$c(t) = (1 - t)\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$$

et

$$d(t) = (1 - t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2$$

sont gauches. Alors, on obtient un **paraboloïde hyperbolique** :

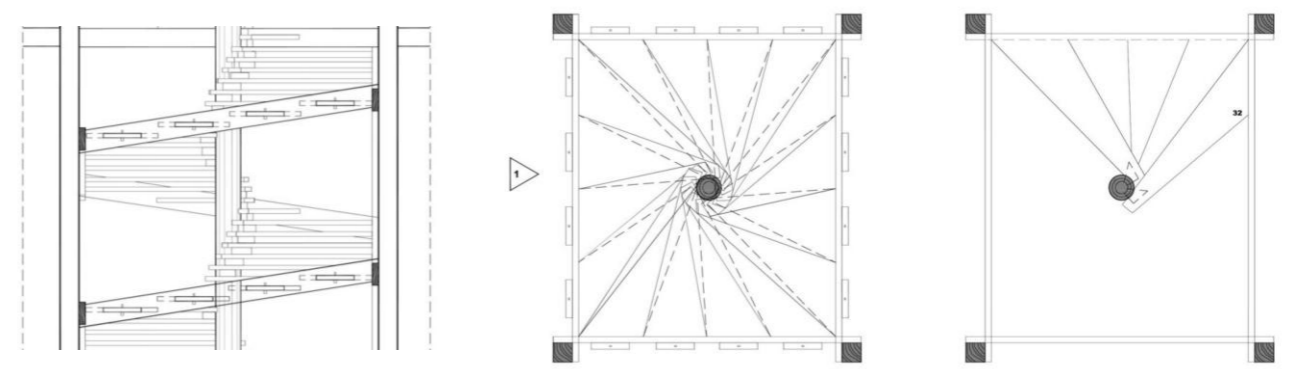
$$r(t, s) = (1 - s)((1 - t)\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2) + s((1 - t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2)$$

où $s, t \in \mathbb{R}$.

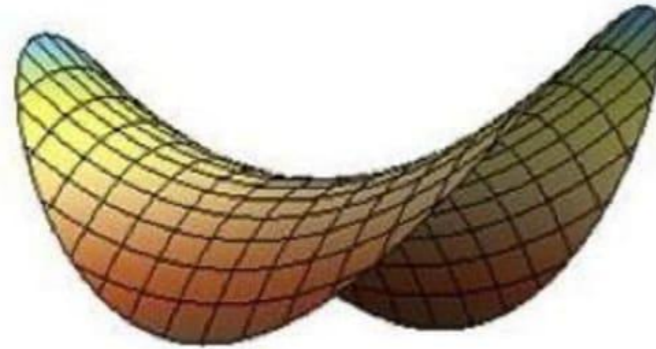


Helicoidal Wooden Staircase

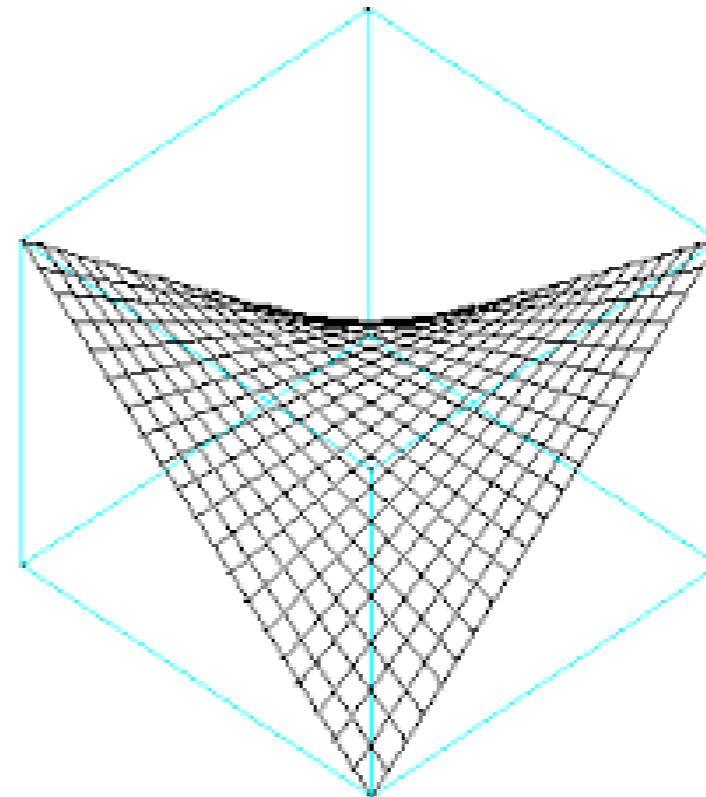
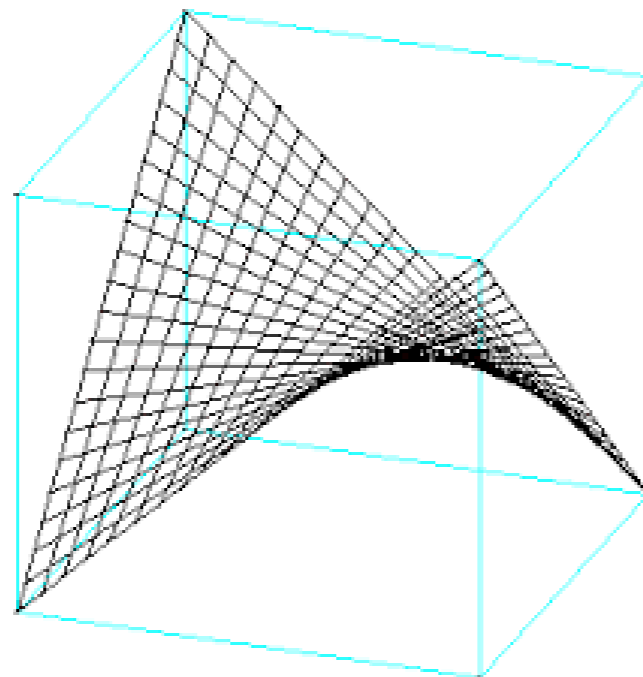
Lina Bo Bardi

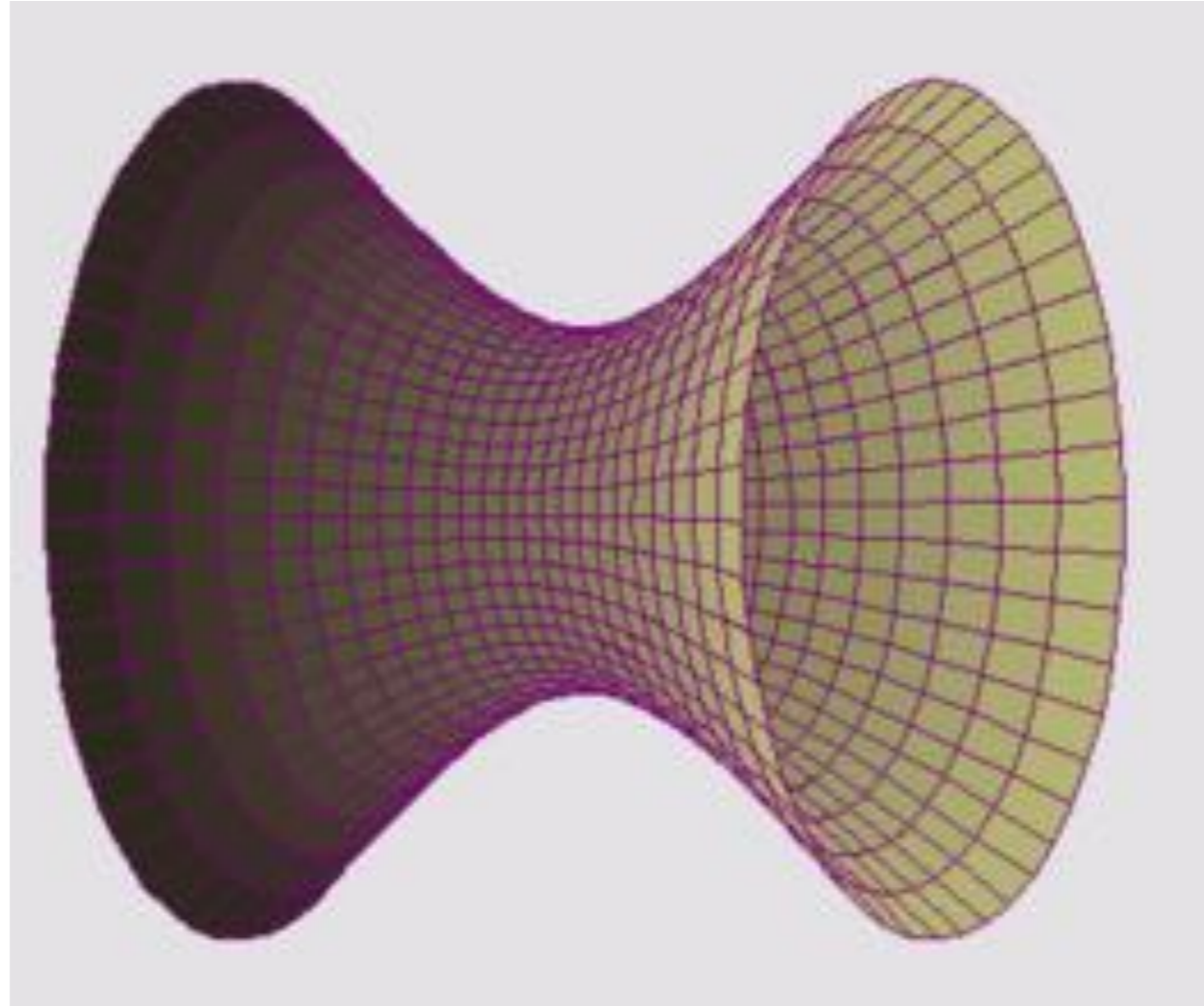


Paraboloïde hyperbolique



$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$



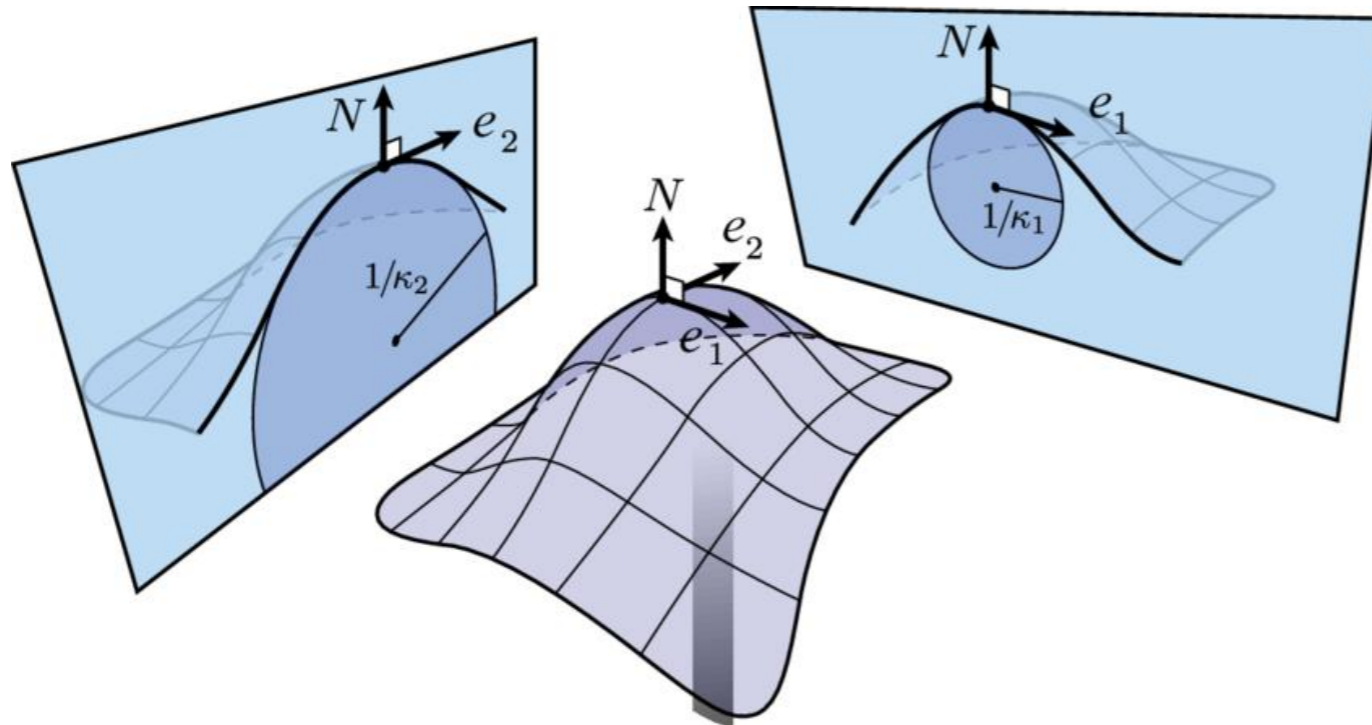
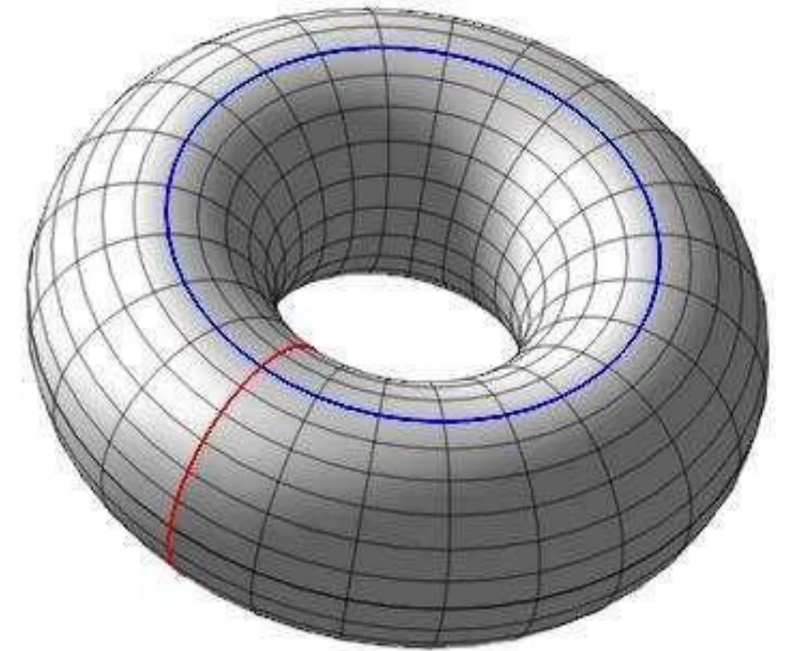
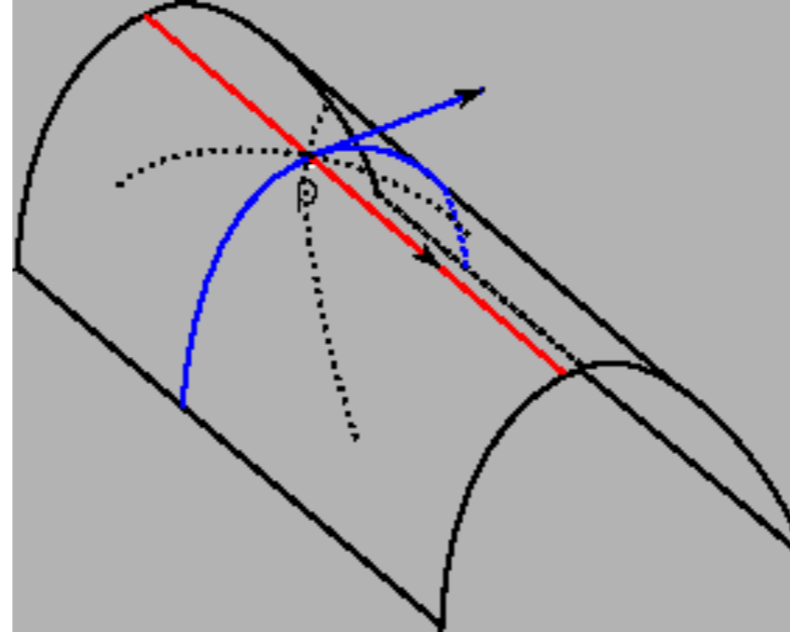
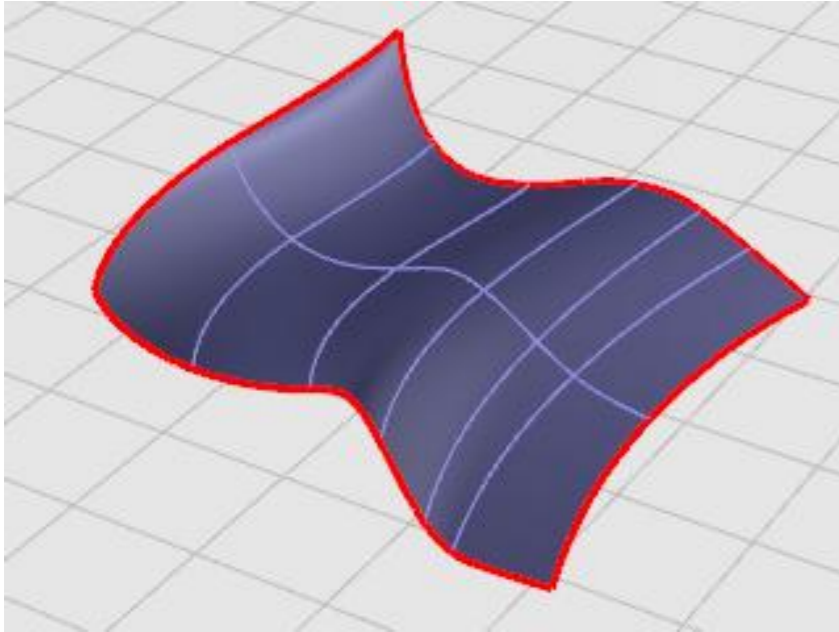


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

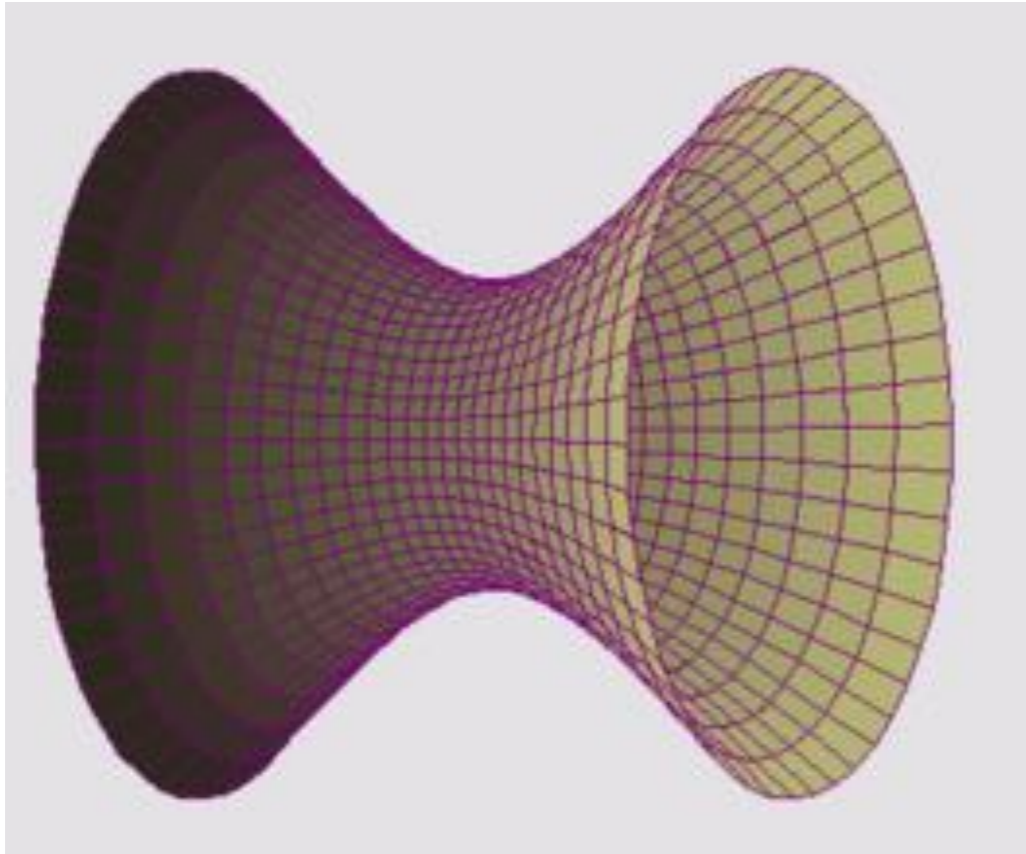
Courbures d'une surface

Philippe Chabloz

Courbure d'une surface



Courbure d'une surface



Euler (1767) montre qu'il existe **deux directions perpendiculaires** où la courbure passe par un **maximum et un minimum**.

Ce sont les **deux courbures principales en chaque point d'une surface**

K_1 K_2

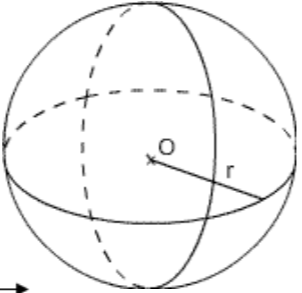
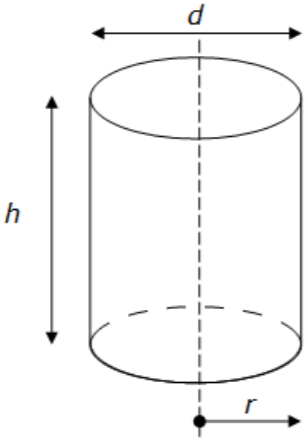
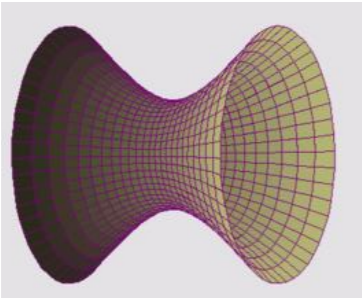
$$\text{Courbure moyenne} = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

$$\text{Courbure de Gauss} = K_1 \cdot K_2 = K$$

Courbure d'une surface

$$\text{Courbure moyenne} = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

$$\text{Courbure de Gauss} = K_1 \cdot K_2 = K$$

| Surface | Courbures principales | Courbure moyenne | Courbure de Gauss |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| Sphère de rayon r  | $\frac{1}{r}$ | $\frac{1}{r}$ | $\frac{1}{r^2} > 0$ |
| Cylindre de rayon r  | $\frac{1}{r}$ | 0 | 0 |
|  | $K_1 > 0$ | $K_2 < 0$ | $K = K_1 \cdot K_2 < 0$ |
| | | $\frac{K_1 + K_2}{2}$ | |

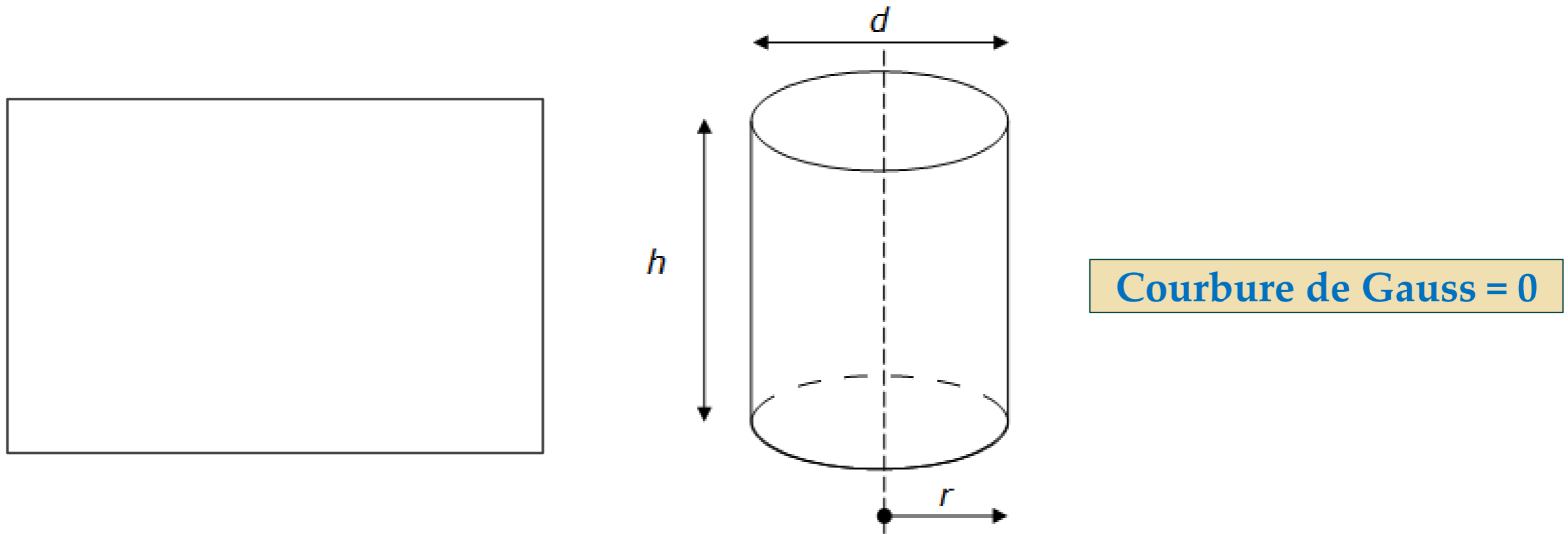
Theorema Egregium de Gauss

La courbure de Gauss est invariante par isométrie locale

Si l'on peut plier une surface en une autre surface sans changer les distances (sans contraction, sans déchirure et sans élongation), alors leurs courbures de Gauss sont égales

La courbure de Gauss ne dépend donc que des distances mesurées SUR la surface et non du plongement de celle-ci dans l'espace tridimensionnel !!!!

Theorema Egregium de Gauss



Une fourmi ne voit pas de différence entre le plan et le cylindre !!!

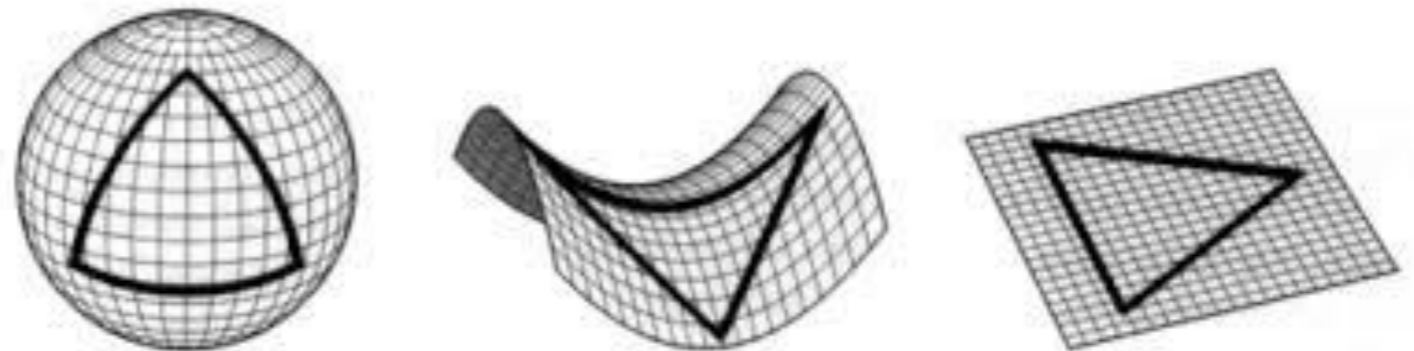
Theorema Egregium de Gauss : conséquences

- Il est impossible de représenter un pays (et a fortiori l'ensemble des continents) sur une carte plane sans déformer certaines distances.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_projections_cartographiques

- On peut mesurer la courbure de Gauss d'une surface en faisant de la géométrie plane (qui n'est plus euclidienne si $K > 0$ ou $K < 0$)

Surface de courbure de
Gauss constante K
Triangle ABC sur cette
surface



Formule de Gauss-Bonnet

somme des angles = $\pi + K \cdot (\text{aire du triangle})$

Theorema Egregium de Gauss : conséquences

Une déformation modifiant la courbure de Gauss modifie les distances → elle ne peut être faite sur un matériau sans élongation ou contraction des longueurs → **meilleure rigidité des surfaces**

- Les coques de bateau sont de courbure de Gauss non nulle.
[https://www.wikiwand.com/fr/Coque_\(m%C3%A9canique\)](https://www.wikiwand.com/fr/Coque_(m%C3%A9canique))

- Le cylindre est plus rigide qu'une tôle

- La tranche de pizza ne tombe pas quand on lui donne une courbure.

<https://naukas.com/2019/03/19/pizzas-y-terraplanistas/>

<https://insidetheperimeter.ca/fr/la-physique-a-la-rescousse-pour-ne-pas-perdre-de-pizza/>

- Un seau a un rebord arrondi pour qu'il ne se déforme pas quand on le porte plein !!



Autres applications

- Carton ou tôle ondulés plus rigides !!
- Un brin d'herbe est légèrement incurvé → il ne tombe pas sous l'effet de la gravitation
- Forme des piliers ou des canettes la plus rigide ?

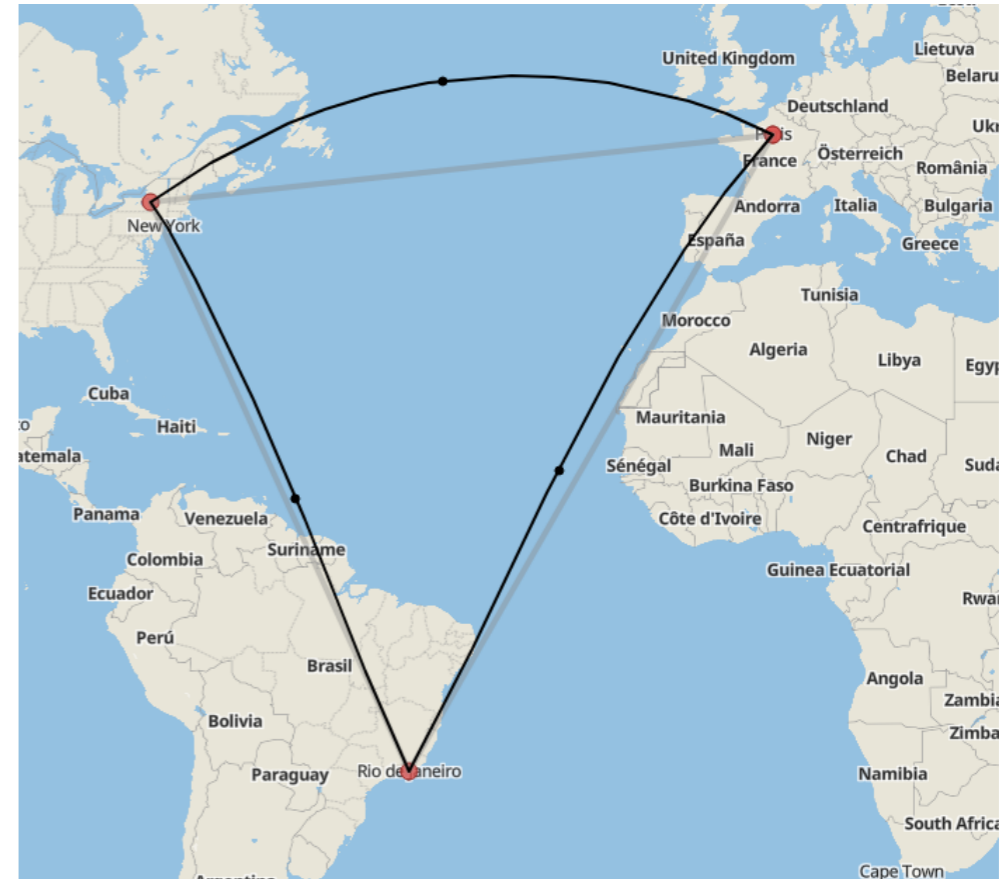
<https://www.youtube.com/watch?v=l3LPn6kdiKs>

Exemples



Somme des angles = 180.00012°

$$\begin{aligned} \text{somme des angles} \\ = \pi + K \cdot (\text{aire du triangle}) \end{aligned}$$



Somme des angles = $\Sigma = 220.1^\circ = 3.842 \text{ rad}$

$$\text{Aire triangle} = \frac{\Sigma - \pi}{K} = (\Sigma - \pi) \cdot R^2 = 28.4 \cdot 10^6 \text{ km}^2$$

Depuis l'antiquité, les mathématiques sont un partenaire indissociable de l'architecture. Ces liens reposent aujourd'hui sur des considérations pratiques et scientifiques, mais autrefois le mysticisme jouait un rôle important. Dans le domaine de proportions, l'utilisation du nombre d'or en est un exemple connu. De nos jours, la conception des constructions a été totalement bouleversée par l'arrivée de l'outil informatique et des puissants algorithmes sous-jacents derrière lesquels les mathématiques sont omniprésentes. Pourtant, dans leur cursus, les nouveaux architectes étudient peu de maths s'ils ne complètent pas leur formation par un diplôme d'ingénieur.

Bertrand Hauchecorne