
Galaxy SOHO, Pékin

Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Cercle osculateur et développée

Philippe Chabloz

Rappels :
courbes planes et ses trois représentations

Une courbe C du plan Oxy peut notamment être définie par :

- Une **représentation paramétrique** : $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in I \subseteq \mathbb{R}$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues sur I. Lorsque le paramètre t parcourt l'intervalle I, l'extrémité du vecteur $\gamma(t)$ parcourt tous les points de la courbe. Un point $M(x, y) \in C$ si et seulement si il existe $t_0 \in I$ tel que $x = x(t_0)$ et $y = y(t_0)$.
- Une **équation cartésienne implicite** du type : $F(x, y) = 0$, c'est-à-dire comme fonction de deux variables indépendantes. Un point $M(x, y) \in C$ si et seulement si $F(x, y) = 0$.
- Une **équation cartésienne explicite** du type : $y = f(x)$, c'est-à-dire comme graphe de la fonction f. Un point $M(x, y) \in C$ si et seulement si $y = f(x)$.

Une courbe n'est pas nécessairement le graphe d'une fonction; c'est pourquoi on parle de *courbe paramétrée* et non pas de *fonction paramétrée*.

On peut parfois obtenir une équation cartésienne implicite ou explicite d'une courbe à partir de sa représentation paramétrique en éliminant le paramètre. La technique utilisée dépend du cas considéré, il n'y a pas de méthode générale.

Rappel : vecteur tangent et courbure

$c(t) = (x(t),\ y(t))$ une courbe sous forme paramétrique

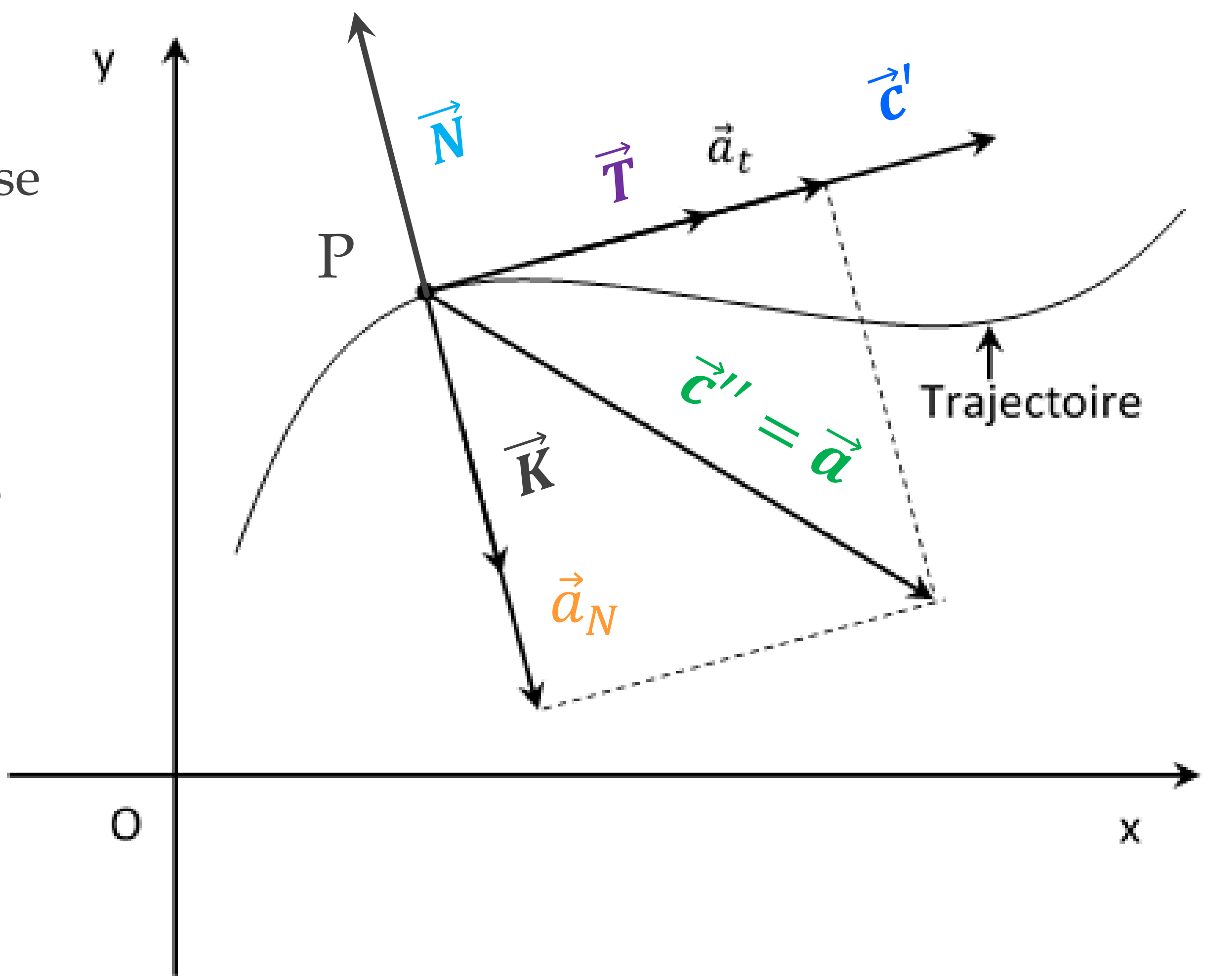
$\vec{c'}$ est le **vecteur tangent** ou le vecteur vitesse

$v = \|c'\|$ est la **vitesse scalaire**

$\vec{T} = \frac{c'}{v} = \frac{1}{v} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le **vecteur tangent unitaire**

$\vec{N} = \mathrm{J}(\vec{T}) = \frac{1}{v} \cdot \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$ est le **vecteur normal unitaire**

$\vec{c''} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ est **l'accélération**



La composante de $\vec{c}''$ colinéaire à $\vec{N}$ est l'accélération centripète $\vec{a}_N$

La **courbure κ** est la composante de $\vec{a}_N$ selon $\vec{N}$ divisée par v^2. Elle est **positive si la courbe tourne à gauche** et négative sinon.

Le couple $(\vec{T}, \vec{N})$ forme en tout point P de la courbe un **repère direct**

Le **rayon de courbure** en P est l'inverse de la courbure en valeur absolue :

$$r_P = \frac{1}{|\kappa_P|}$$

Courbure et cercle osculateur

Pour une courbe donnée sous forme paramétrique, nous avons vu que la courbure au point paramétré par est donnée par la formule

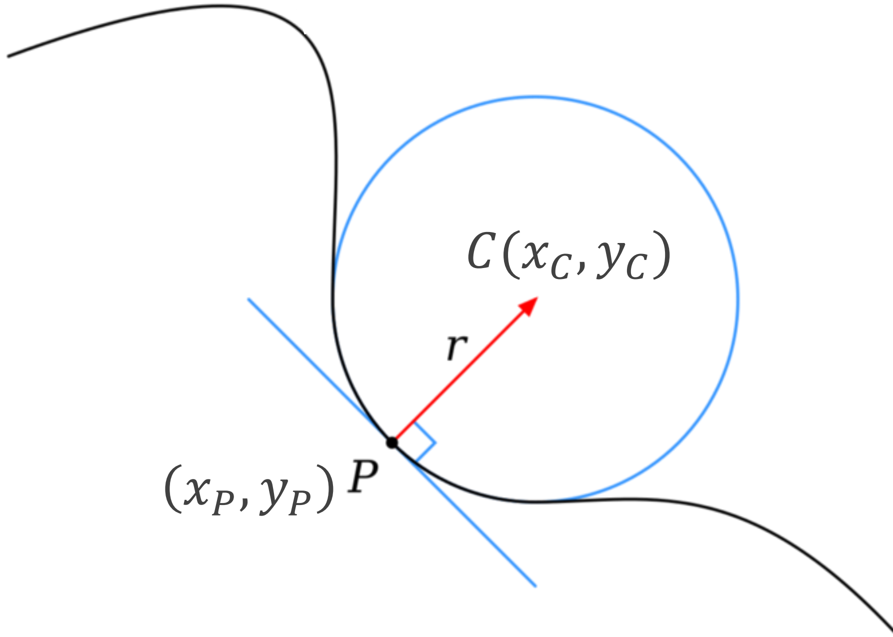
$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{1}{v^2}\,\boldsymbol{c}''\cdot\vec{N} = \frac{\det(c',\ c'')}{v^3} = \frac{x'y''-x''y'}{v^3} = \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

et que le rayon de courbure est donné par l'inverse de la courbure (en valeur absolue).
En fait le centre du cercle de courbure au point $\mathrm{P}(x_P\ y_P)$ est donné par

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{\kappa_P}\cdot\vec{N}_P = c_P + \frac{1}{\kappa_P}\cdot\vec{N}_P = \begin{pmatrix}x_P\\ y_P\end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa_P}\,\frac{1}{v_P}\begin{pmatrix}-y_P'\\ x_P'\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x_P\\ y_P\end{pmatrix} + \frac{v_P^3}{x_P'y_P''-x_P''y_P{}'}\cdot\frac{1}{v_P}\begin{pmatrix}-y_P'\\ x_P'\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x_P\\ y_P\end{pmatrix} + \frac{v_P^2}{x_P'y_P''-x_P''y_P{}'}\cdot\begin{pmatrix}-y_P'\\ x_P'\end{pmatrix}$$



Les coordonnées du centre du cercle osculateur sont donc

$$x_C = x_P - \frac{y_P{}'\cdot(x_P{}'^2+y_P{}'^2)}{x_P'y_P''-x_P''y_P{}'}$$

$$y_C = y_P + \frac{x_P{}'\cdot(x_P{}'^2+y_P{}'^2)}{x_P'y_P''-x_P''y_P{}'}$$

Courbure et cercle osculateur

Les coordonnées du centre C du cercle osculateur à une courbe en un point P sont

$$x_C = x_P - \frac{{y_P}' \cdot ({x_P}'^2 + {y_P}'^2)}{x'_P y''_P - x''_P {y_P}'}$$

$$y_C = y_P + \frac{{x_P}' \cdot ({x_P}'^2 + {y_P}'^2)}{x'_P y''_P - x''_P {y_P}'}$$

et le rayon vaut

$$r_P = \frac{1}{|\kappa_P|} = \frac{({x_P}'^2 + {y_P}'^2)^{3/2}}{|x'_P y''_P - x''_P y'_P|}$$

Si la courbe est donnée sous **forme cartésienne explicite $y = f(x)$** en utilisant le paramétrage canonique **$x = t$** et $y = f(t)$, on obtient pour un point $P(x_P, f(x_P))$ sur la courbe:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= x_P - \frac{f'(x_P) \cdot [1 + f'(x_P)^2]}{f''(x_P)} \\ y_C &= y_P + \frac{1 + f'(x_P)^2}{f''(x_P)} \end{aligned}\right\}$$

Coordonnées du centre du cercle osculateur pour une courbe $y = f(x)$ au point $P(x, f(x))$

$$r_P = \frac{(1 + f'(x_P)^2)^{3/2}}{|f''(x_P)|}$$

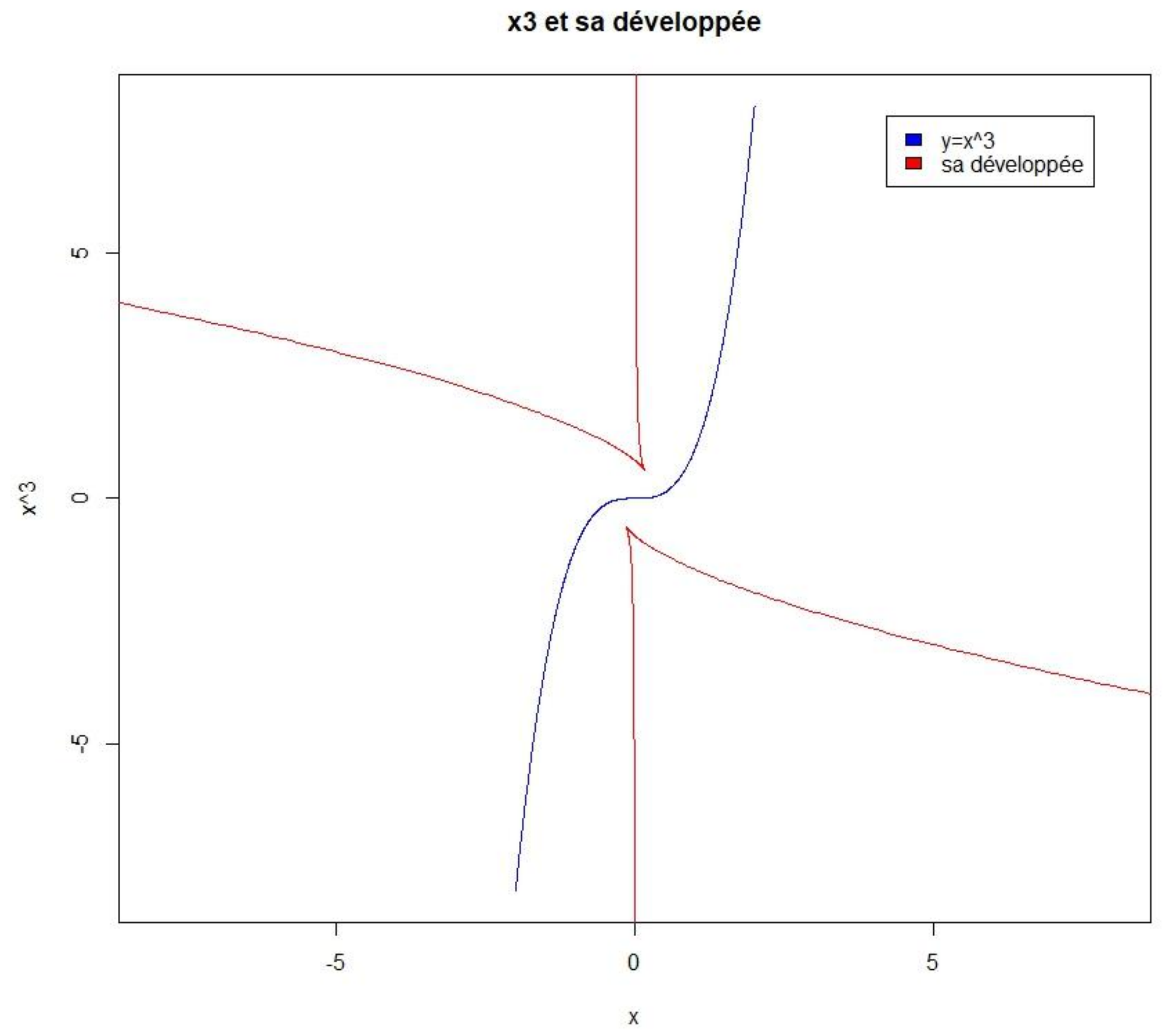
Rayon du cercle osculateur pour une courbe $y = f(x)$ au point $P(x, f(x))$

Exercice

Soit la courbe définie par l'équation $y = x^3$. Calculer la courbure, ainsi que les coordonnées du centre du cercle osculateur en un point sur la courbe $P(a, a^3)$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice

Soit la courbe définie par l'équation $y = x^3$. Calculer la courbure, ainsi que les coordonnées du centre du cercle osculateur en un point sur la courbe $P(a, a^3)$, où $a \in \mathbb{R}$.



Développée d'une courbe

Soit c une courbe.

Définition:

L'ensemble des centres osculateurs en tout point P de c forme une courbe appelée **la développée de c**.

On la notera d_c

Par ce qui précède une paramétrisation de la développée est donnée par

$$d_c(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\vec{N} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \frac{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \cdot \begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

Formule générique:

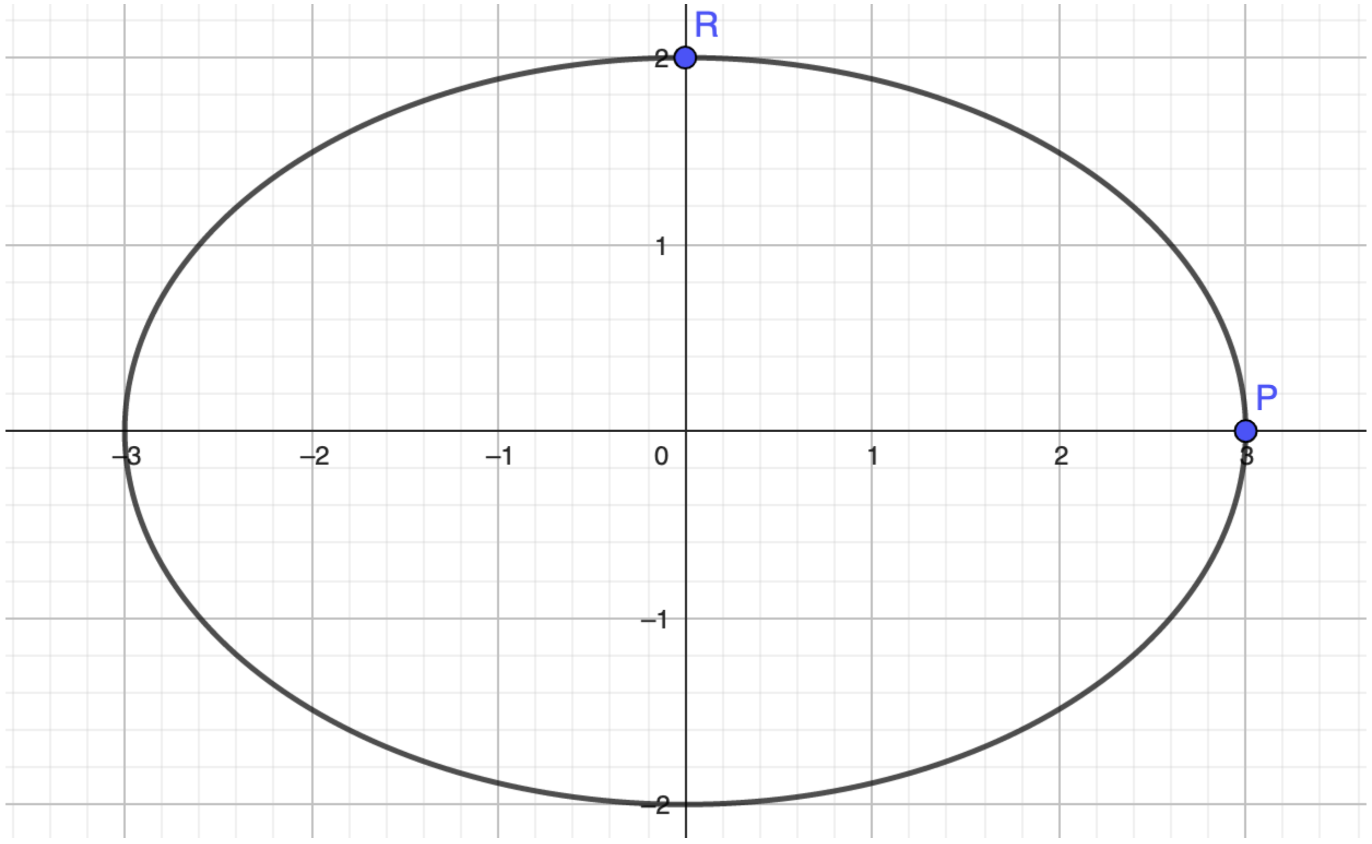
$$\vec{d}_c = \vec{c} + \frac{v^2}{\det(\vec{c}', \vec{c}'')} \cdot J(\vec{c}')$$

Exercice

Soit l'ellipse définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(\theta) = 3\cos(\theta) \\ y(\theta) = 2\sin(\theta) \end{cases} \quad \text{où } \theta \in [0,2\pi].$$

Déterminer les équations paramétriques de sa développée

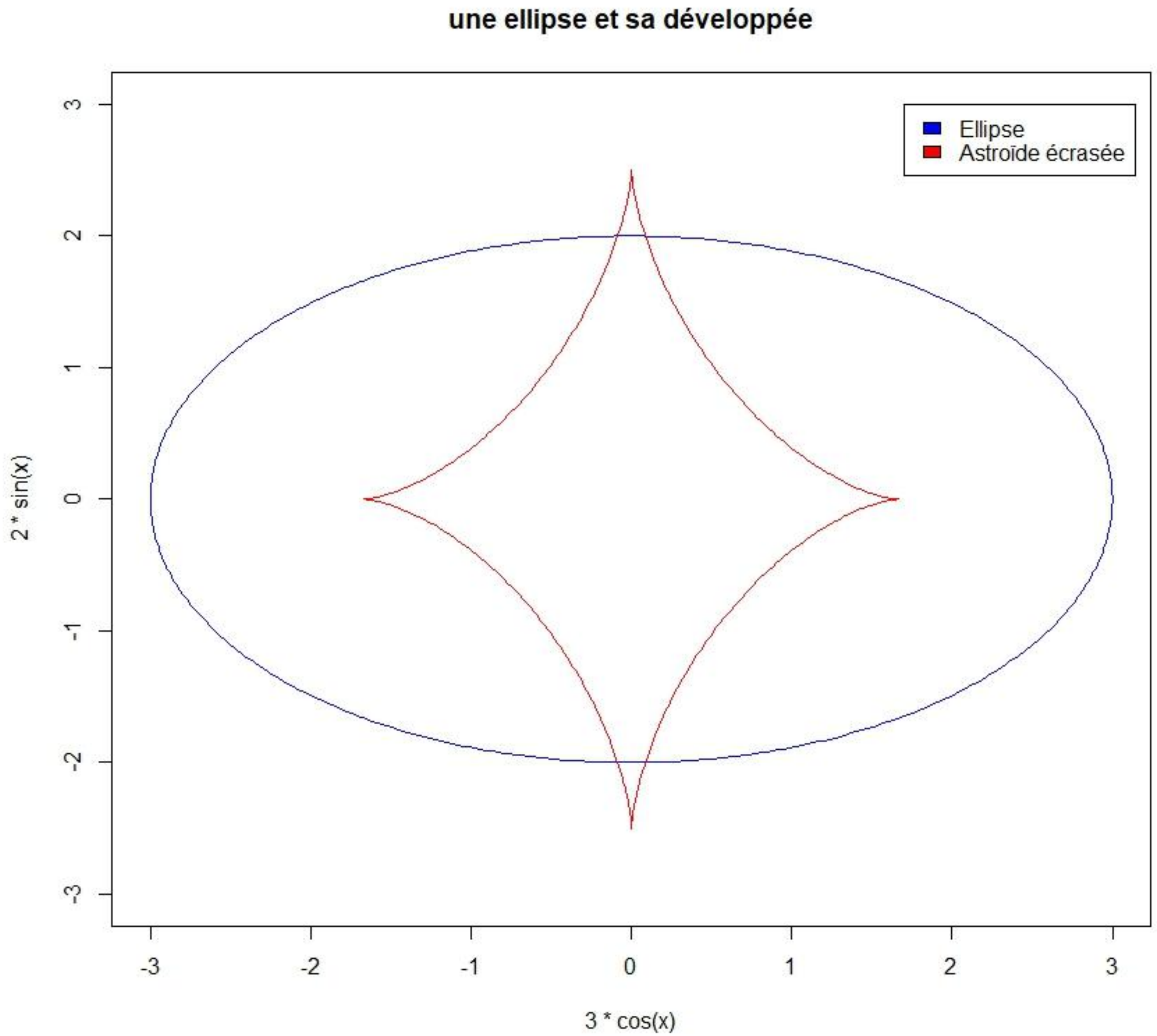


Exercice

Soit l'ellipse définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(\theta) = 3\cos(\theta) \\ y(\theta) = 2\sin(\theta) \end{cases} \quad \text{où } \theta \in [0,2\pi].$$

Déterminer les équations paramétriques de sa développée



Exemple

Soit la courbe définie par l'équation $y = x^2$ (parabole).

a) Calculer la courbure à l'origine $O(0,0)$ et au point $P(1,1)$.

b) Calculer les coordonnées du centre du cercle osculateur de la courbe au point $O(0,0)$.

c) Donner les équations paramétriques de la développée de la courbe.

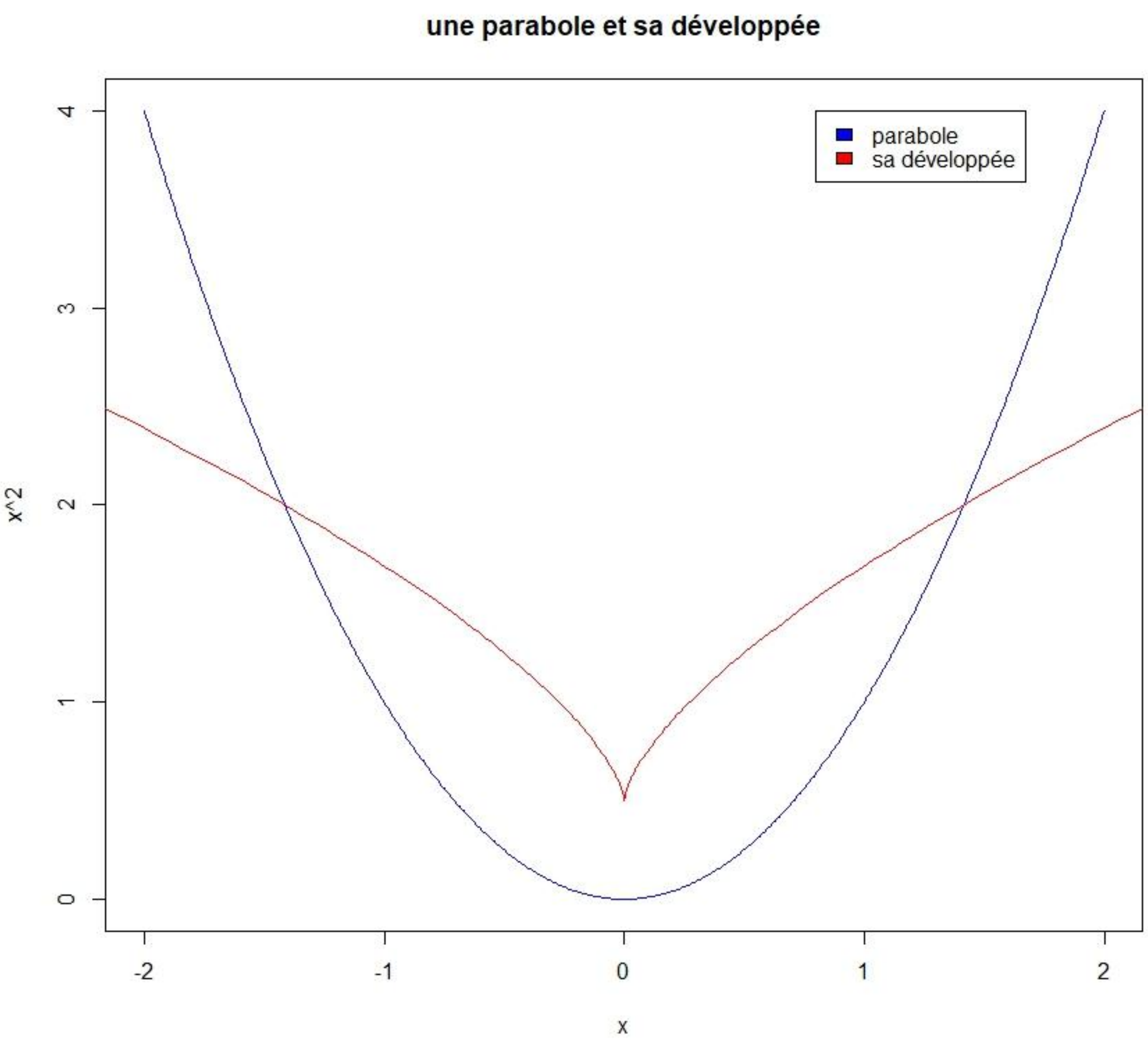
Exemple

Soit la courbe définie par l'équation $y = x^2$ (parabole).

a) Calculer la courbure à l'origine $O(0{,}0)$ et au point $P(1{,}1)$.

b) Calculer les coordonnées du centre du cercle osculateur de la courbe au point $O(0{,}0)$.

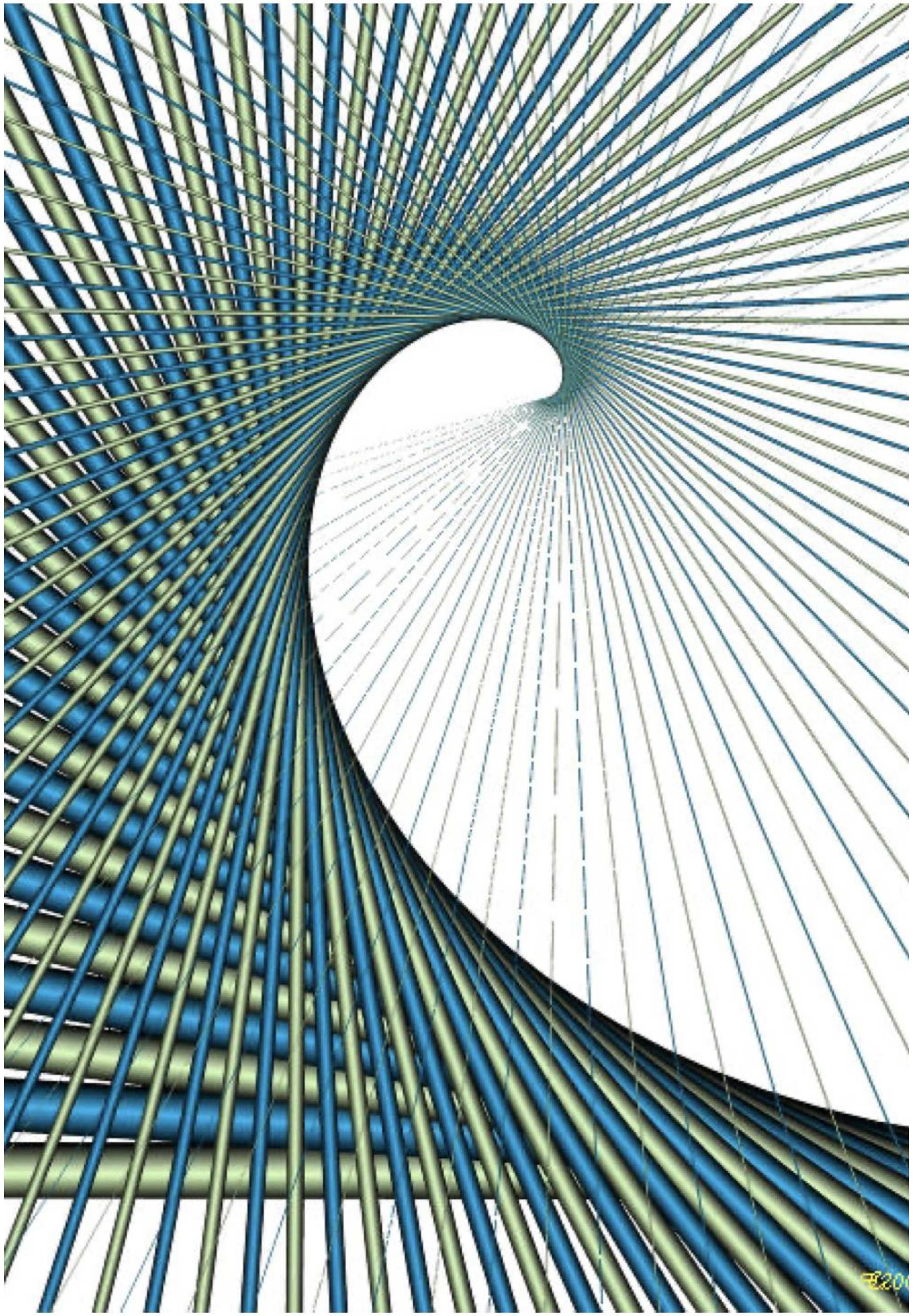
c) Donner les équations paramétriques de la développée de la courbe.

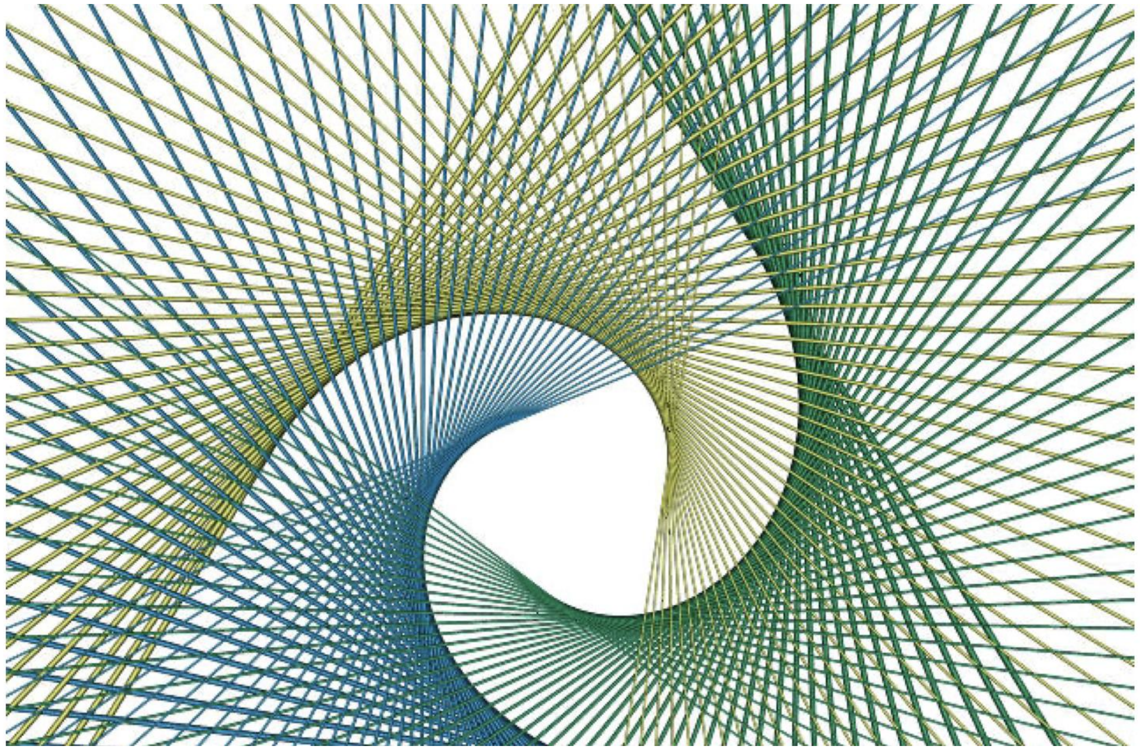


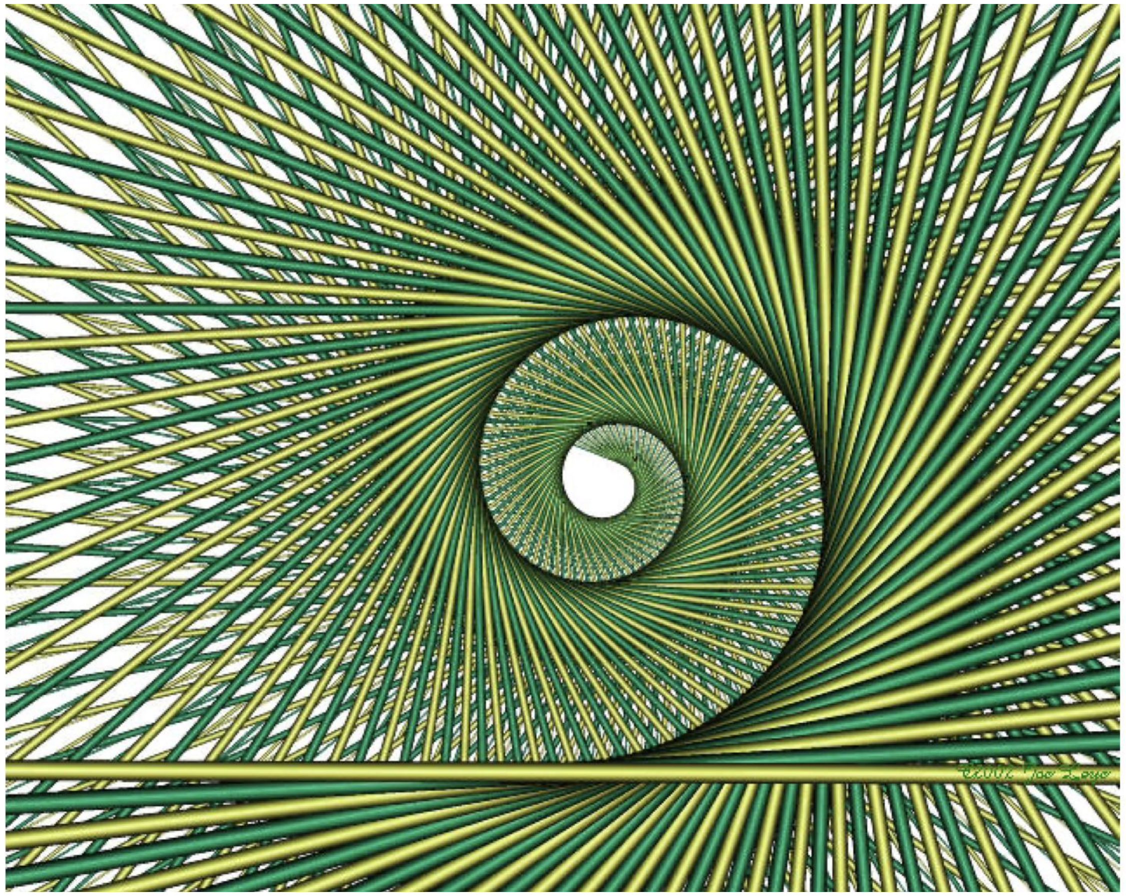
Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

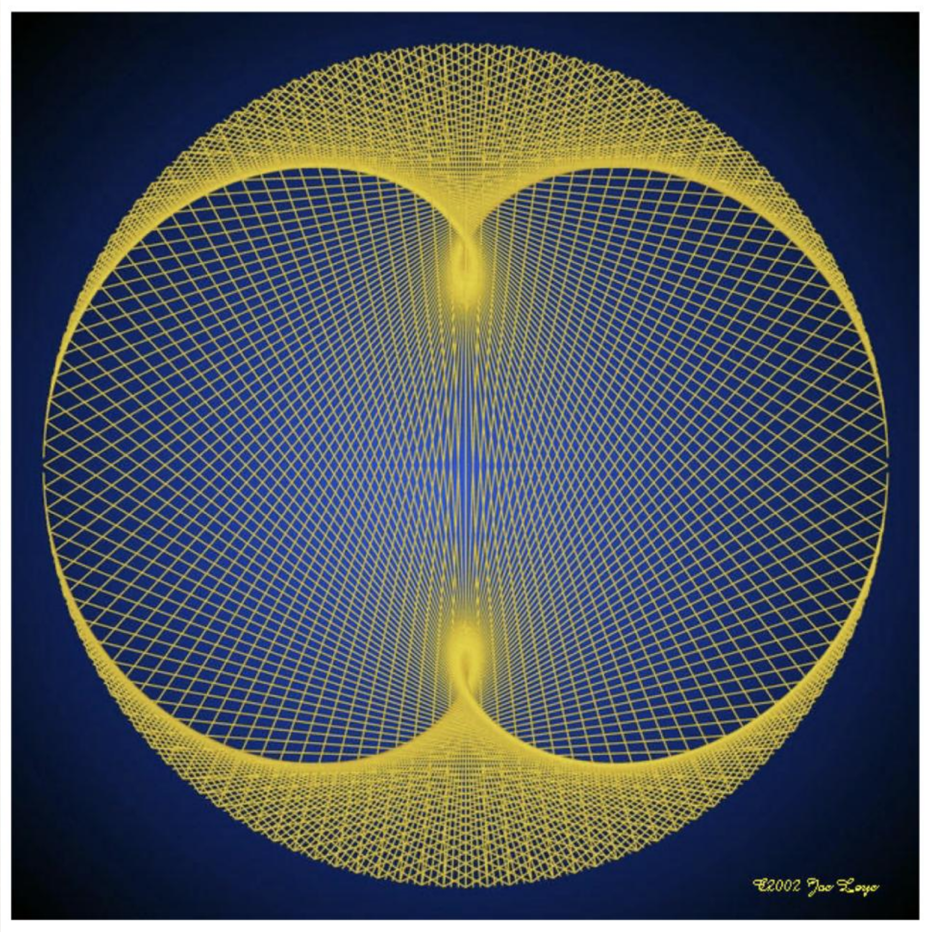
Enveloppe d'une famille de courbes

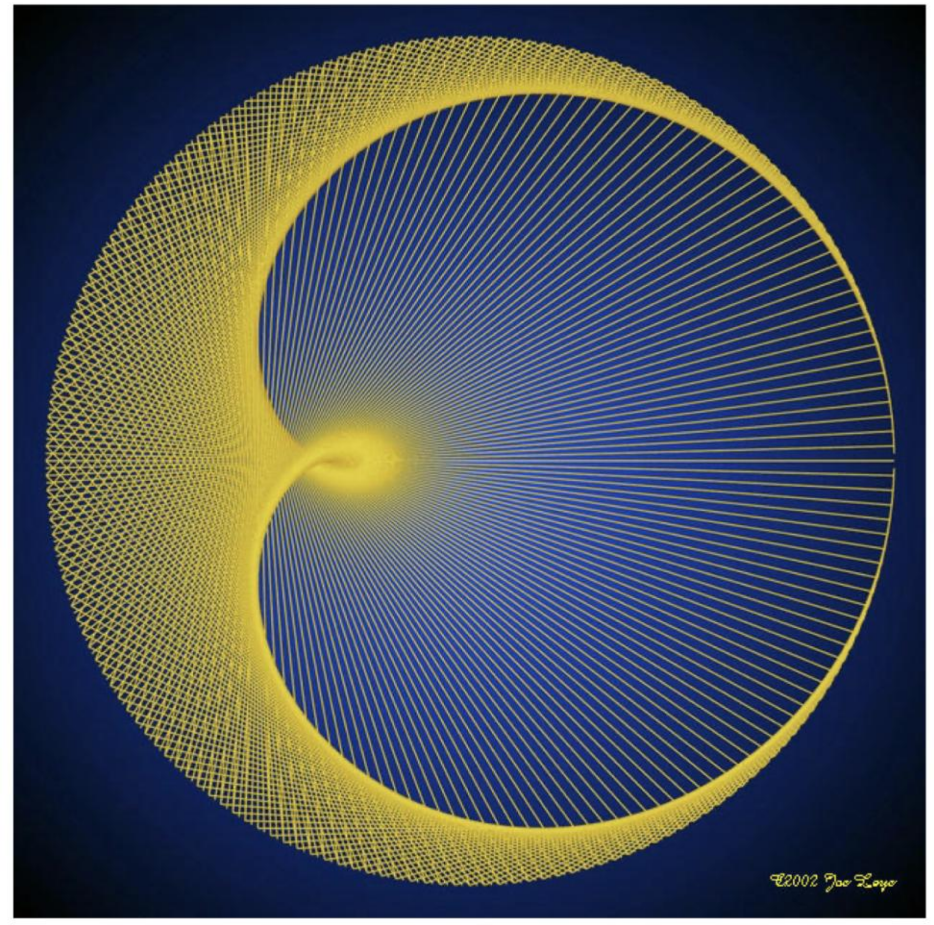
Philippe Chabloz

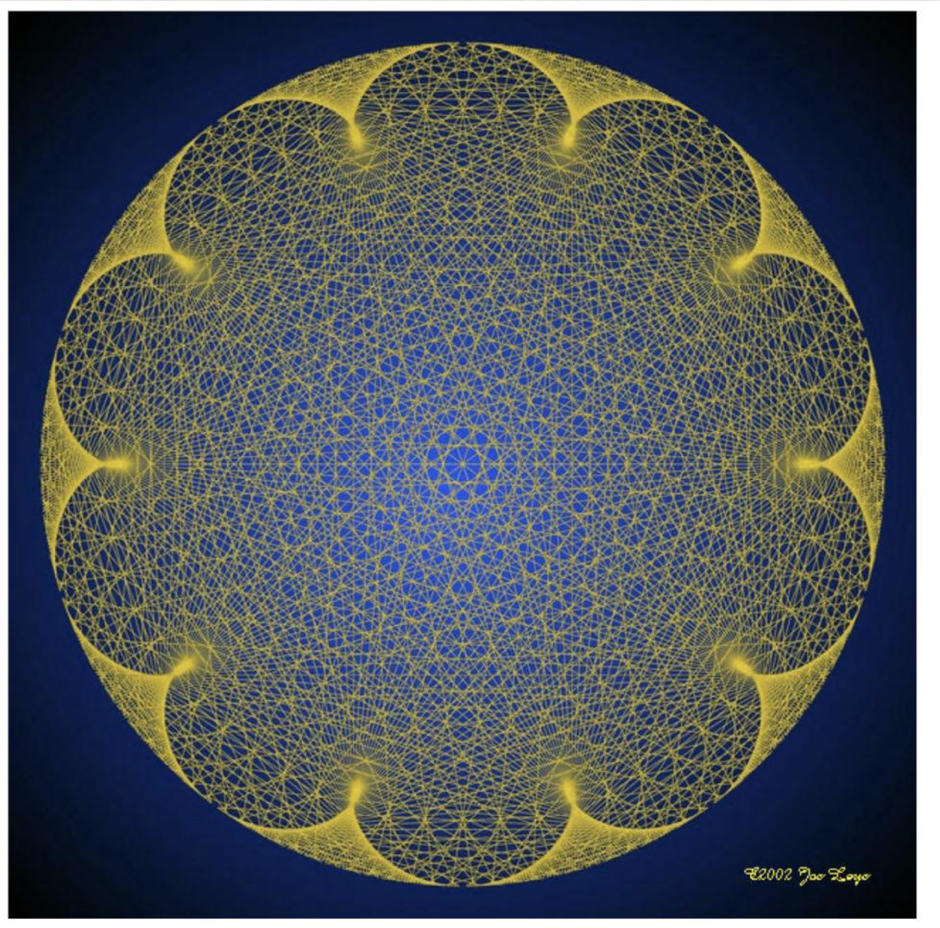


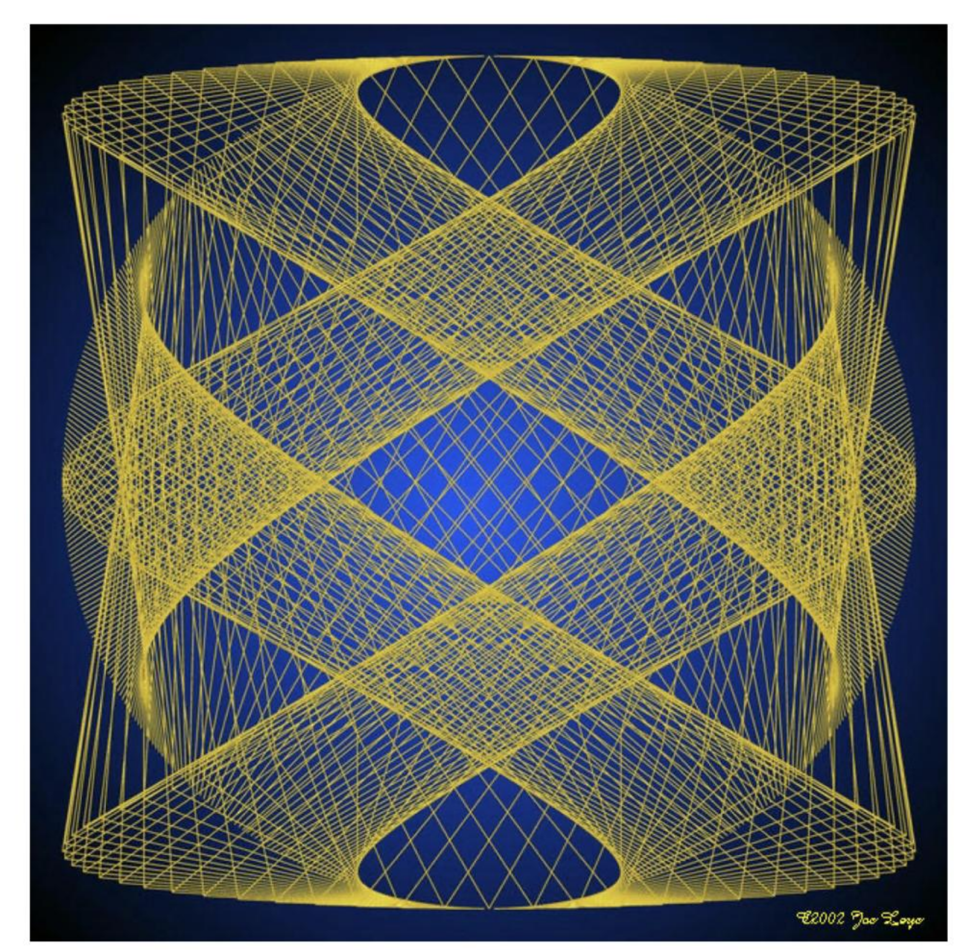





©2002 Joe Loyo


©2002 Joe Loyo


©2002 Joe Loyo


©2002 Joe Loyo

Familles de courbes

Une **famille de courbes** est un ensemble de courbes similaires de sorte qu'une courbe est obtenue à partir des autres de la famille en faisant **varier un paramètre**.

Exemples :

1. La famille de cercles centrées dans l'origine est décrite par l'équation (implicite) :

   $F_r(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0,$ où $r > 0$ est le paramètre.

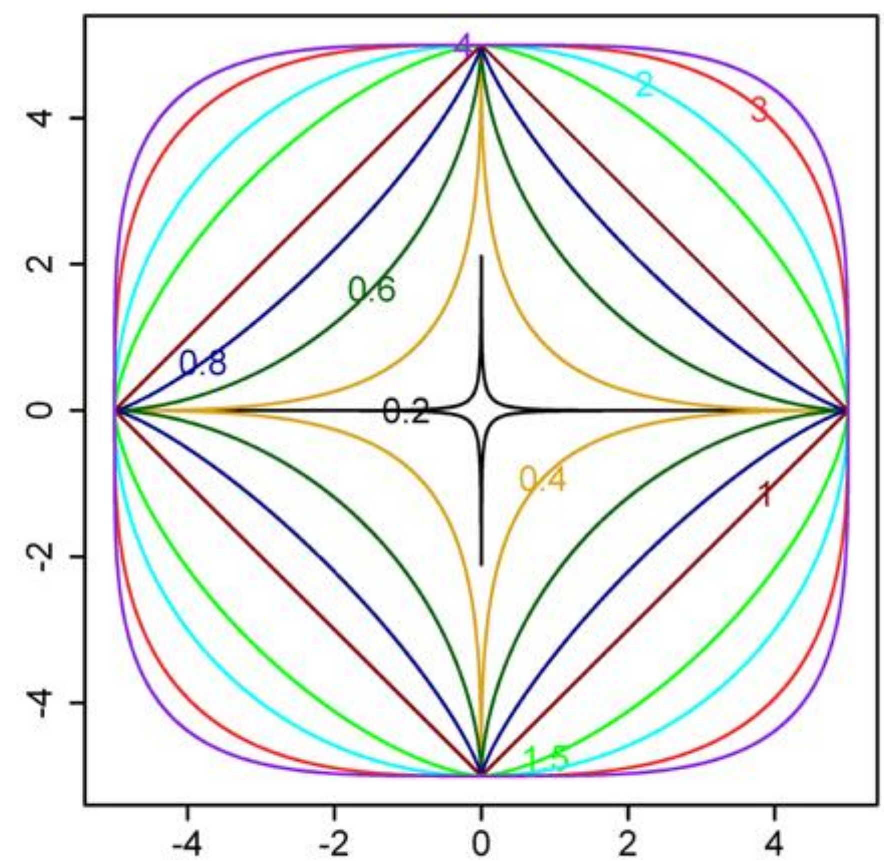
2. La famille des *super-cercles* centrées dans l'origine est décrite par l'équation implicite :

   $F_n(x,y) = |x|^n + |y|^n - 1 = 0$, où $n > 0$ est le paramètre.

3. La famille des droites tangentes au cercle de rayon 1 centré dans l'origine est décrite par l'équation (implicite) :

$$F_\theta(x,y) = \sin(\theta)y + \cos(\theta)x - 1 = 0,$$

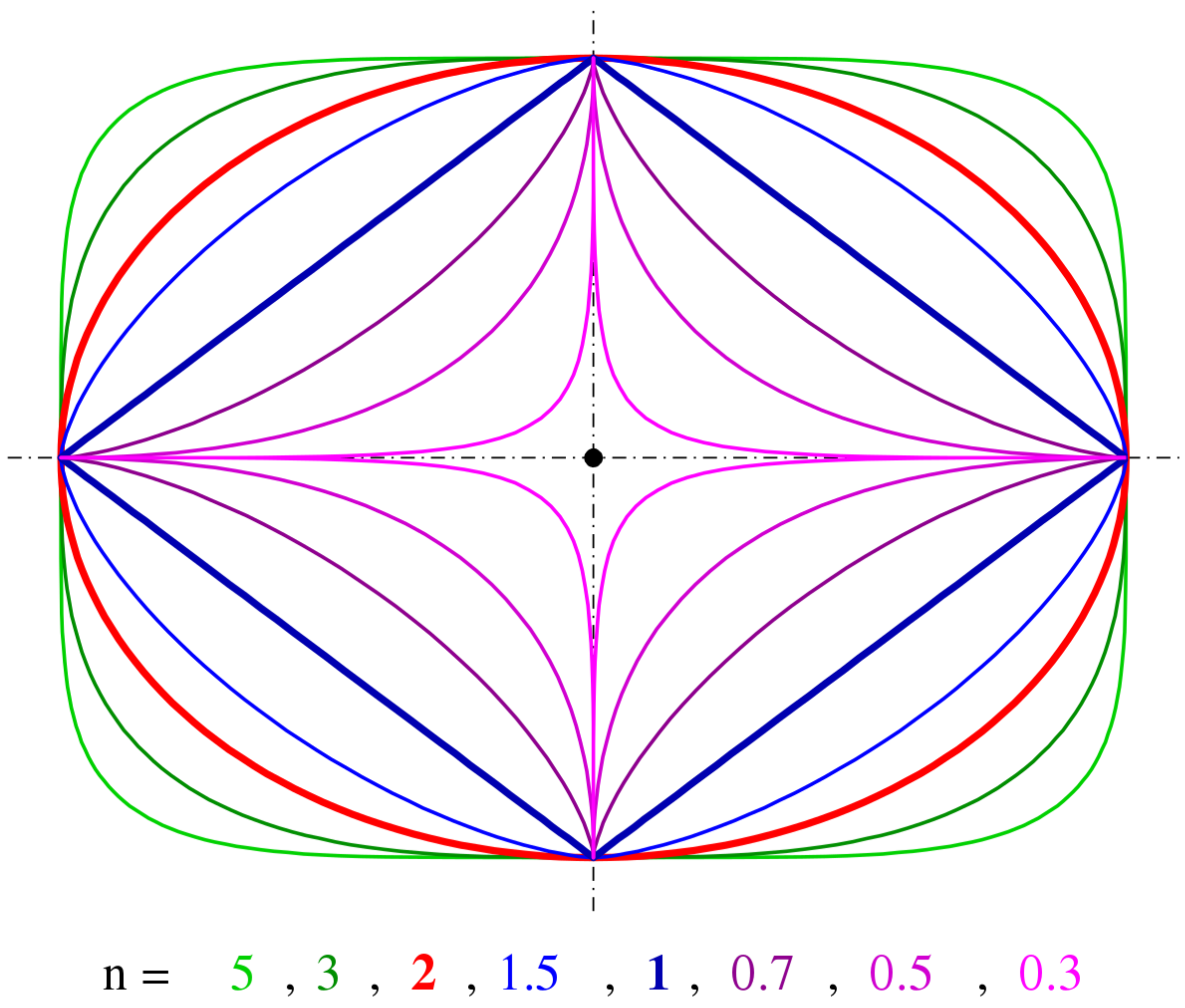
où $\theta \in [0,2\pi[$ est le paramètre.

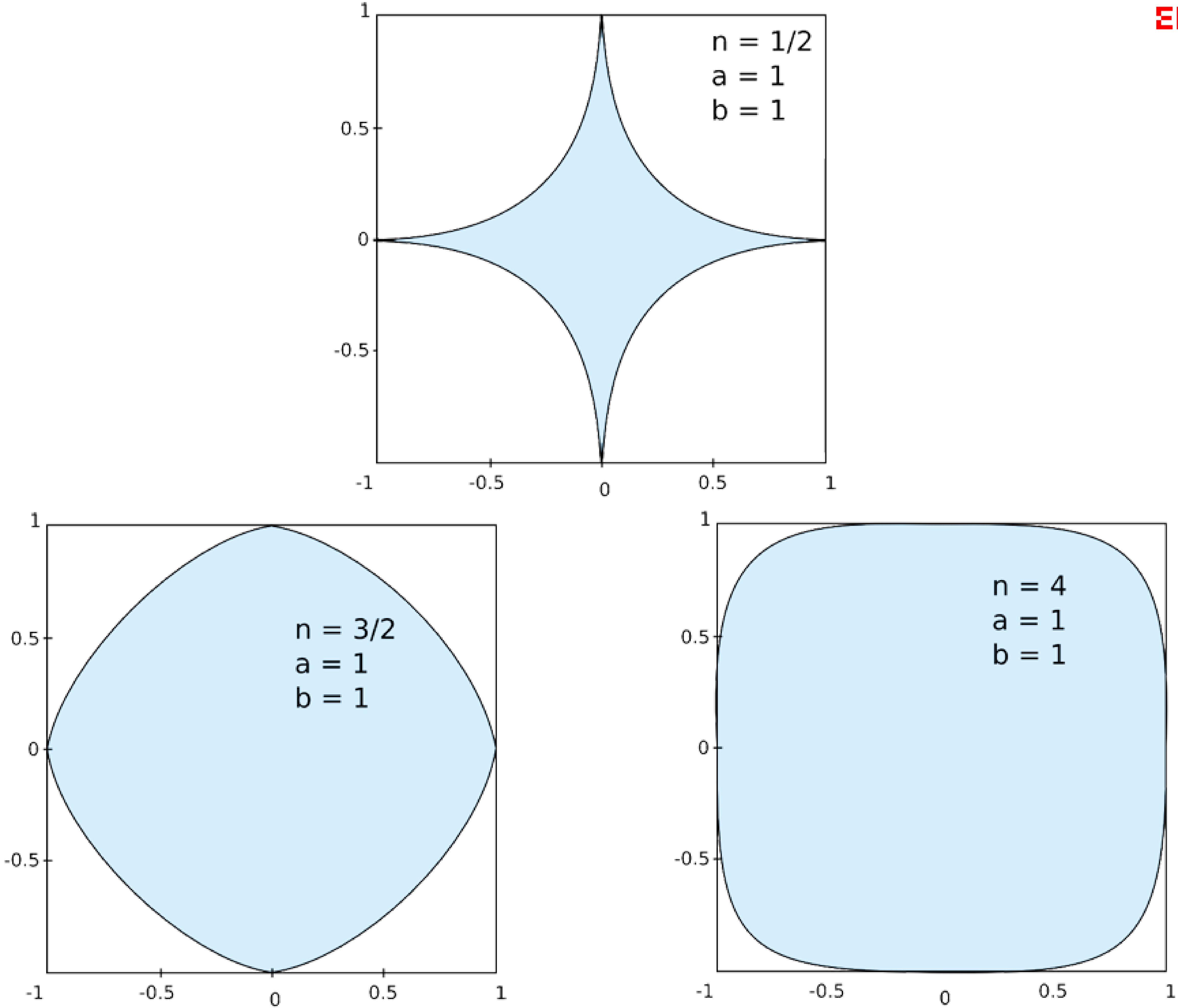


La super-ellipse

Piet Hein, mathématicien et inventeur danois, est connu pour avoir utilisé une super-ellipse dans l'architecture scandinave. Une représentation paramétrique d'une super-ellipse est :

$$\gamma(t) = (\pm a|\cos(t)|^{2/n}, \pm b|\sin(t)|^{2/n}) \quad \text{avec } a, b > 0,\ t \in [0,2\pi[\text{ et } n > 0.$$



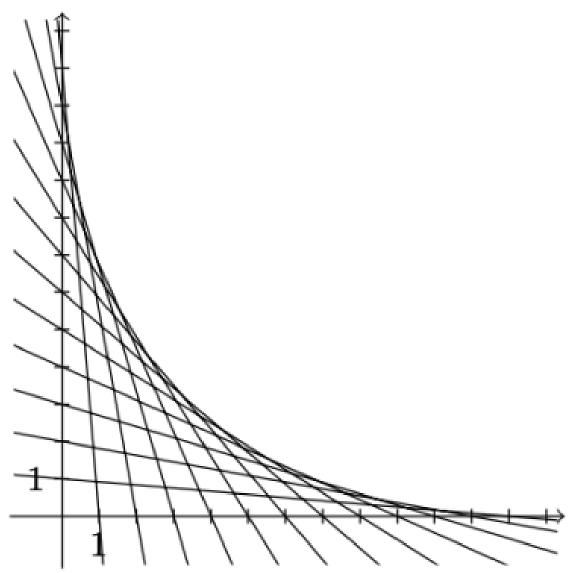

n = 1/2
a = 1
b = 1
n = 3/2
a = 1
b = 1
n = 4
a = 1
b = 1
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.5
0
0.5
1

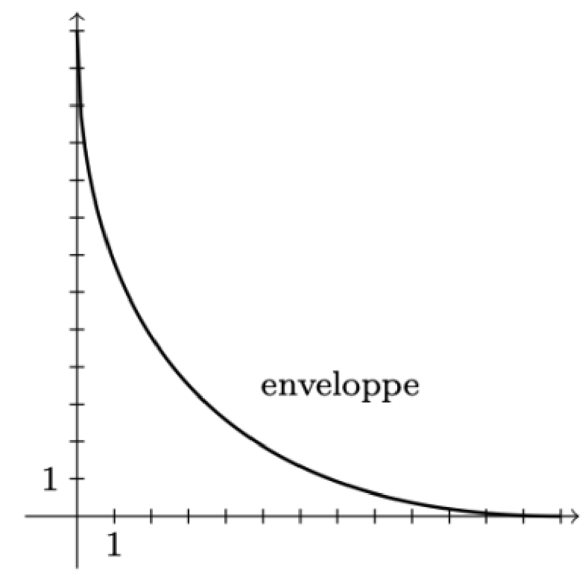
Problème de Dürier

Enveloppe d'une famille de courbes

- En 1525 A. Dürier considère la famille des droites qui passent par les points $A(a,0)$ et $B(0,13-a)$, où $a \in \mathbb{R}$. Si le paramètre a est fixé, l'équation d'une droite passant par ces deux points sera donnée par :

$$y_a(x) = \frac{a-13}{a}x + (13-a).$$





- En faisant varier le paramètre a on obtient une famille de droites qui est décrite par l'équation (explicite) :

$$y_a(x) = \frac{a-13}{a}x + (13-a), \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \text{ est le paramètre.}$$

- On observe que le profil de cette famille de droites est une courbe, appelée **enveloppe de la famille**.

Problème de Dürier **: commet déterminer l'équation de l'enveloppe ?**

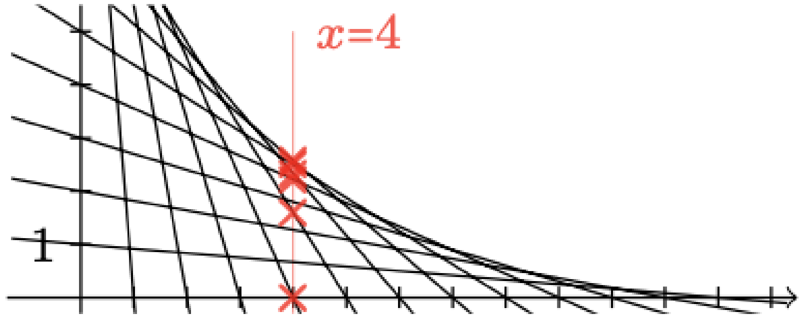
Solution au problème de Dürier

- Ce problème fut longuement discuté dans la correspondance entre *Leibniz*, *Johann Bernoulli* et *le Marquis de l'Hospital*. Pour résoudre ce problème, un changement majeur de paradigme était nécessaire. L'idée qui en découle a conduit à la définition de courbure d'une courbe.

- **Idée** : on **fixe la valeur de x** et on fait **varier le paramètre a**. Si par exemple $x = 4$, la coordonnée de y sur la droite devient :

$$y_a(4) = \frac{4a-52}{a} + (13 - a) = 17 - a - \frac{52}{a}.$$

a	3	4	5	6	7	8	9
y	−3.33	0	1.6	2.33	2.57	2.5	2.22



- Pour trouver la valeur de l'enveloppe au point $x = 4$, nous devons calculer le maximum de l'expression *y par rapport à a*.

- La dérivée de y_a *par rapport à a est* $\frac{\partial y_a}{\partial a} = -1 + \frac{52}{a^2}$. Le maximum est atteint pour $a = \sqrt{52}$, la valeur maximale de y_a cherchée (lorsque $x = 4$) est $y_a = 17 - \sqrt{52} - \frac{52}{\sqrt{52}} \approx 2.6$.

Solution au problème de Dürier

- *Cas général* (x quelconque) : on va dériver l'expression

$$y_a(x) = \frac{a-13}{a}x + (13-a)$$

par rapport à a (en traitant x comme constant !). En utilisant la notation de la **dérivée partielle**

$$\frac{\partial y_a}{\partial a}(x) = \frac{a-(a-13)}{a^2}x - 1 = \frac{13}{a^2}x - 1.$$

- On cherche la valeur maximale, donc on impose $\frac{\partial y_a}{\partial a}(x) = 0$, et nous résolvons par rapport à a (**en traitant x comme constant !**) :

$$\frac{13}{a^2}x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{13x}.$$

- Comme $\frac{\partial y_a}{\partial a}(x) > 0$ si et seulement si $-\sqrt{13x} < a < \sqrt{13x}$, le maximum est atteint pour $a = \sqrt{13x}$. On réintroduit cette valeur dans l'équation de départ :

$$y(x) = \frac{\sqrt{13x}-13}{\sqrt{13x}}x + (13-\sqrt{13x}) = x - 2\sqrt{13x} + 13$$

- On en déduit que la solution au problème de Dürier est donc la parabole d'équation

$$(y-x-13)^2 = 52x.$$

Dérivée partielle

Si une fonction dépend de **deux variables** $y = y(t,s)$
on notera

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t,s) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(t,s)$$

la **dérivée** de la fonction $y(t,s)$ **par rapport à t en considérant s comme constant** et on l'appelle

la dérivée partielle de y par rapport à t.

De même on notera

$$\frac{\partial}{\partial s} y(t,s) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial y}{\partial s}(t,s)$$

la **dérivée** de la fonction $y(t,s)$ **par rapport à s en considérant t comme constant et** on l'appelle

la dérivée partielle de y par rapport à s.

Ainsi une fonction à 2 variables possède 2 dérivées partielles.

Exemple : soit $x(t,\alpha) = t \cdot \cos\alpha$. Alors

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t,\alpha) = \cos\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} x(t,\alpha) = -\mathrm{t} \sin\alpha$$

Méthode générale pour calculer les équations paramétriques de l'enveloppe d'une famille de courbes

Famille de courbes à un paramètre

On considère une famille de courbes Γ_λ, indexée par un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour chaque valeur de λ, l'équation d'une courbe de la famille est supposée de la forme implicite :

$$F_\lambda(x, y) = 0.$$

On cherche les conditions sur une courbe d'équations paramétriques

$$\lambda \in \mathbb{R} \to (x(\lambda), y(\lambda)) \in \mathbb{R}^2$$

pour qu'au point associé à la valeur λ du paramètre elle soit tangente à la courbe définie par F_λ. Une telle courbe est solution du système d'équations :

$$\begin{cases} F_\lambda(x, y) = 0 \\ \frac{d}{d\lambda} F_\lambda(x, y) = 0 \end{cases}$$

On appelle **enveloppe de la famille de courbes** Γ_λ la courbe vérifiant ce système d'équations.

L'existence de l'enveloppe n'est pas toujours assurée. Ainsi une famille de droites parallèles ou une famille de cercles concentriques ne possèdent pas d'enveloppe. Mais si elle existe, la courbe enveloppe est « *en général* » tangente à toutes les courbes de la famille.

Exemple

- Soit la famille Γ_λ de droites décrite par l'équation implicite suivante

$$F_\lambda(x,y) = \sin(\lambda)y + \cos(\lambda)x - 1 = 0 \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Pour chaque valeur de λ, l'équation $F_\lambda(x,y) = 0$ est l'équation d'une droite que l'on peut écrire explicitement via la fonction :

$$f_\lambda(x) = -\frac{1}{\tan(\lambda)}x + \frac{1}{\sin(\lambda)}$$

- Pour calculer l'enveloppe de cette famille, dérivons l'expression $F_\lambda(x,y)$ par rapport au paramètre :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}F_\lambda(x,y) = \cos(\lambda)y - \sin(\lambda)x$$

- En imposant $F_\lambda(x,y) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial\lambda}F_\lambda(x,y) = 0$ on obtient le système de deux équations suivant :

$$\begin{cases} \sin(\lambda)y + \cos(\lambda)x - 1 = 0 \\ \cos(\lambda)y - \sin(\lambda)x = 0 \end{cases}$$

- Nous résolvons le système afin de trouver les équations paramétriques de l'enveloppe :

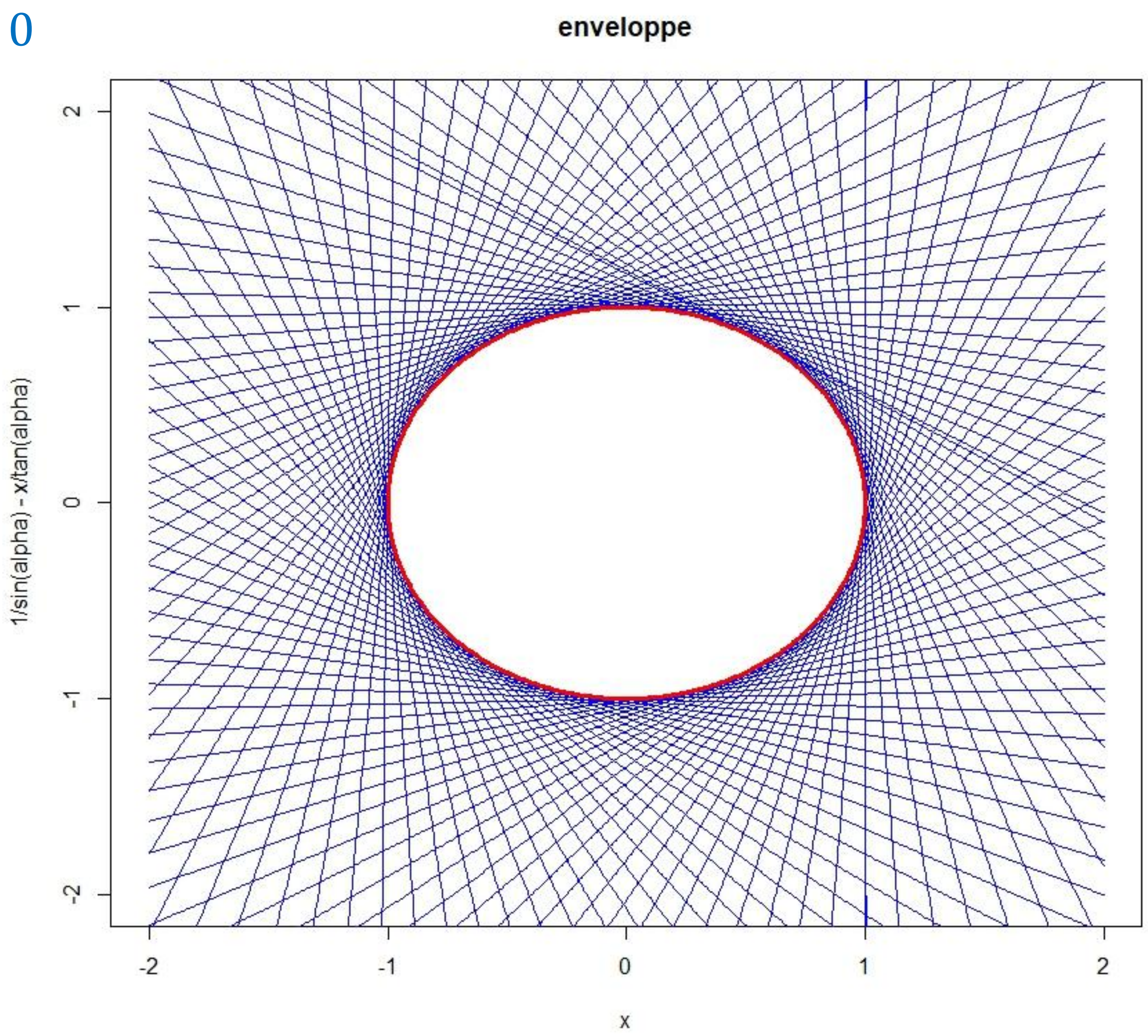
$$\begin{cases} x = \cos(\lambda) \\ y = \sin(\lambda) \end{cases}$$

L'enveloppe est donc un cercle de rayon 1 centré à l'origine d'équation implicite $x^2 + y^2 = 1$.

Exemple

Soit la famille Γ_λ de droites décrite par l'équation implicite suivante

$$F_\lambda(x, y) = \sin(\lambda)y + \cos(\lambda)x - 1 = 0$$



Exercice

Considérons la famille Γ_λ de droites suivantes :

$$F_\lambda(x, y) = x - \cos(\lambda)y - \sin(\lambda) = 0$$

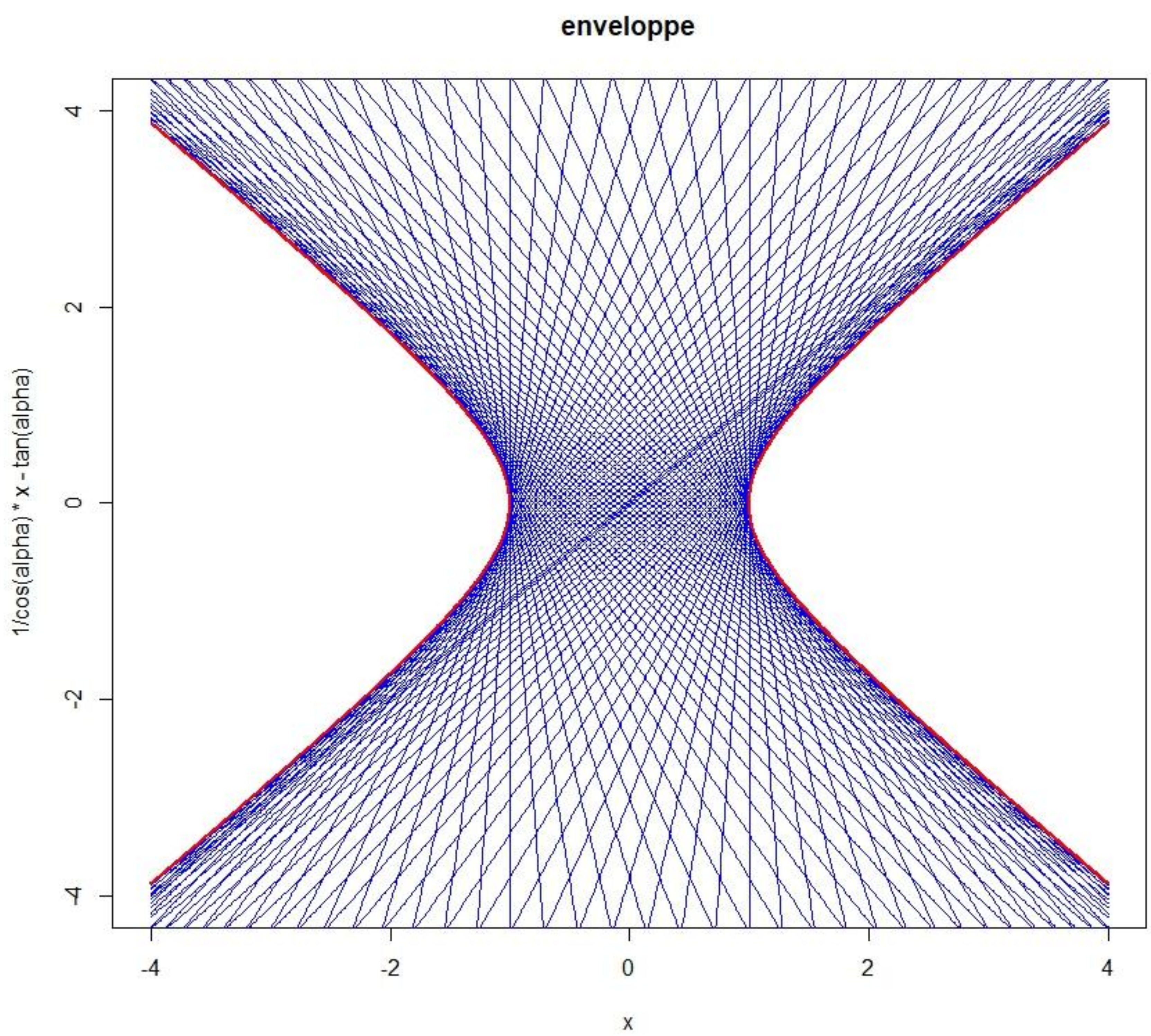
où $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer les équations paramétriques de l'enveloppe de la famille.

Exercice

Considérons la famille Γ_λ de droites suivantes :

$$F_\lambda(x,y) = x - \cos(\lambda)y - \sin(\lambda) = 0$$

Calculer les équations paramétriques de l'enveloppe de la famille.



Forme paramétrique

Soit une famille de courbes paramétrées par λ et données sous forme paramétrique

$$\begin{cases} x = x_\lambda(t) \\ y = y_\lambda(t) \end{cases}$$

Pour trouver l'enveloppe de cette famille il faut résoudre l'équation

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

en **exprimant t comme fonction de λ (ou l'inverse !)** et introduire la solution dans l'équation paramétrique de la famille de courbes.

Exemple : Dürier en paramétrique

On peut aussi décrire la famille des droites par les équations paramétriques (**on pose $t = \frac{x}{a}$**)

$$\begin{cases} x_a(t) = at \\ y_a(t) = (a-13)\,t + 13 - a \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

Pour trouver l'enveloppe de cette famille de courbes (ici des droites) il faut résoudre l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{Or} \quad \frac{\partial x}{\partial a} = t, \quad \frac{\partial y}{\partial a} = t-1, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = a \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = a - 13$$

$$\begin{vmatrix} t & a \\ t-1 & a-13 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{donne} \quad at - 13t - at + a = 0 \quad \text{donc} \quad a = 13t$$

Si on remplace a par $13t$ dans les équations paramétriques de départ, on obtient:

$$\begin{cases} x(t) = 13\,t^2 \\ y(t) = 13(t-1)t + 13 - 13\,t = 13\,t^2 - 26t + 13 \end{cases}$$

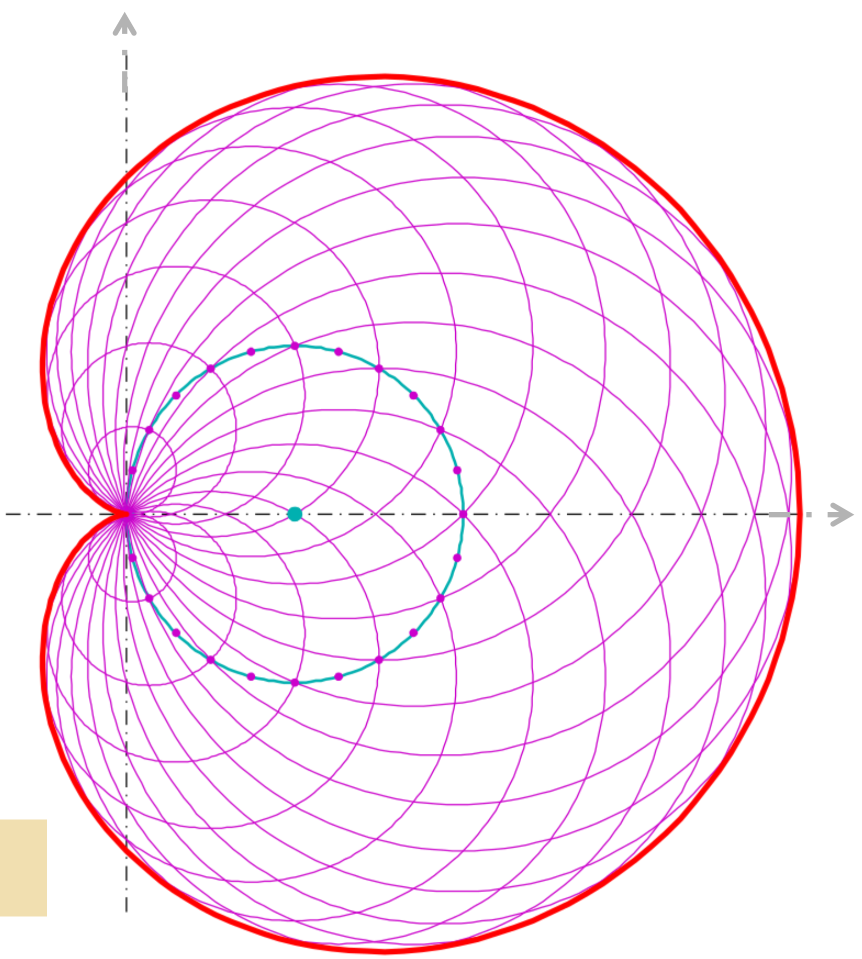
On constate que l'on a bien $(y - x - 13)^2 = (26t)^2 = 4 \cdot 13 \cdot 13t^2 = 52x$.

On retrouve bien l'équation cartésienne de la parabole du slide 22.

La paramétrisation de cette parabole donne en plus $t = 0 \ \rightarrow \ (0,13)$ et $t = 1 \rightarrow (13,0)$

Exemple : cardioïde (implicite)

On considère le cercle C de centre $A(1,0)$ et de rayon 1 (**en bleu sur la figure**). Pour chaque point P_θ du cercle C on considère le cercle violet de centre P_θ passant par l'origine. Nous allons montrer **que l'enveloppe de la famille de ces cercles est une cardioïde**.



Soit $P(1+\cos\theta, \sin\theta)$ un point du cercle bleu. Le **rayon du cercle** est la longueur $\overline{OP}$ qui vaut

$$r = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{2+2\cos\theta}$$

L'équation cartésienne du cercle violet est alors

$$\left(x-(1+\cos\theta)\right)^2 + (y-\sin\theta)^2 = 2+2\cos\theta$$

qui après simplification s'écrit aussi

$$F_\theta(x,y) = x^2 - 2x\cdot(1+\cos\theta) + y^2 - 2y\cdot\sin(\theta) = 0$$

Pour trouver l'enveloppe de la famille de ces cercles (paramétrée par θ) il faut **dériver $F_\theta(x,y)$ par rapport à θ** et poser $\frac{\partial}{\partial\theta}F_\theta(x,y) = 0$. Ceci donne

$$\frac{\partial}{\partial\theta}F_\theta(x,y) = 2x\sin\theta - 2y\cos\theta = 0$$

donc $\tan\theta = \frac{y}{x}$ puis $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

En faisant la substitution dans $F_\theta(x,y)$ on obtient, après calculs $(x^2+y^2-2x)^2 = 4(x^2+y^2)$ qui est bien une cardioïde avec $a=2$