



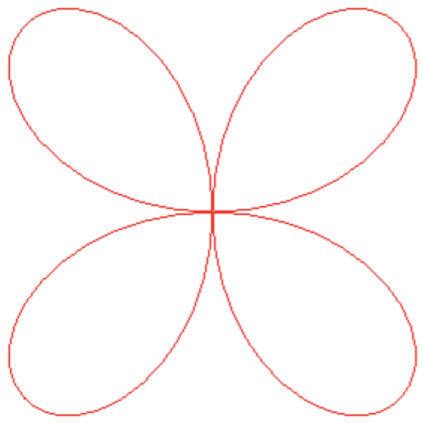
Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Courbes planes

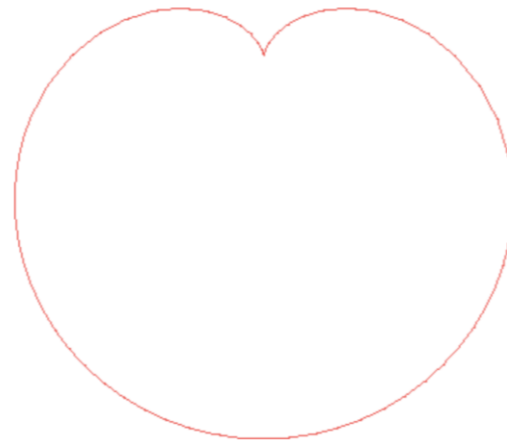
Philippe Chabloz

Exemples dans le plan

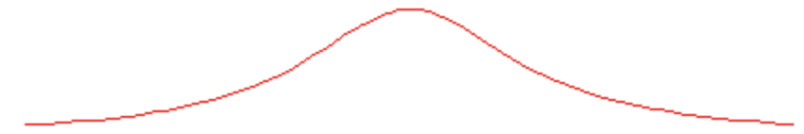
(pour le plaisir des yeux..)



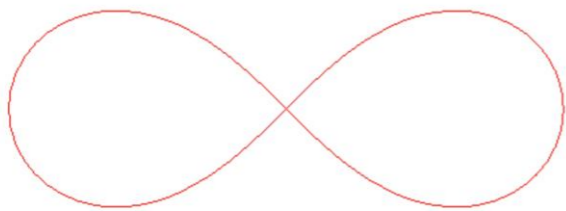
Trèfle à quatre feuilles



Cardioïde



Cubique d'Agnesi



Lemniscate de Bernoulli



Spirale d'Archimède



Parabole semi-cubique

Définition

Une **représentation paramétrique d'une courbe** (C) est un système d'équations où les coordonnées des points de la courbe sont exprimées en fonction d'un *paramètre* (souvent noté t, k, θ, \dots).

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions de la variable réelle $t \in I$ où I est un intervalle de \mathbb{R} . À tout réel t , on associe le point $M(t)$ défini par le vecteur $\overrightarrow{OM} = (x(t), y(t))$.

L'ensemble \mathcal{C} des points $M(x, y)$ tels que

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in I,$$

est appelé **courbe paramétrée de paramètre t** .

Remarques :

- Les équations paramétriques d'une courbe ne sont pas uniques !
- Une courbe n'est pas nécessairement le graphe d'une fonction ; c'est pourquoi on parle de courbe paramétrée et non pas de fonction paramétrée.

Droites dans le plan

Soit un point $P(p_x, p_y)$ et un vecteur directeur de la droite $\vec{d} = (d_x, d_y)$. Une **représentation paramétrique de la droite qui passe par P de vecteur directeur \vec{d}** est donnée par le système suivant :

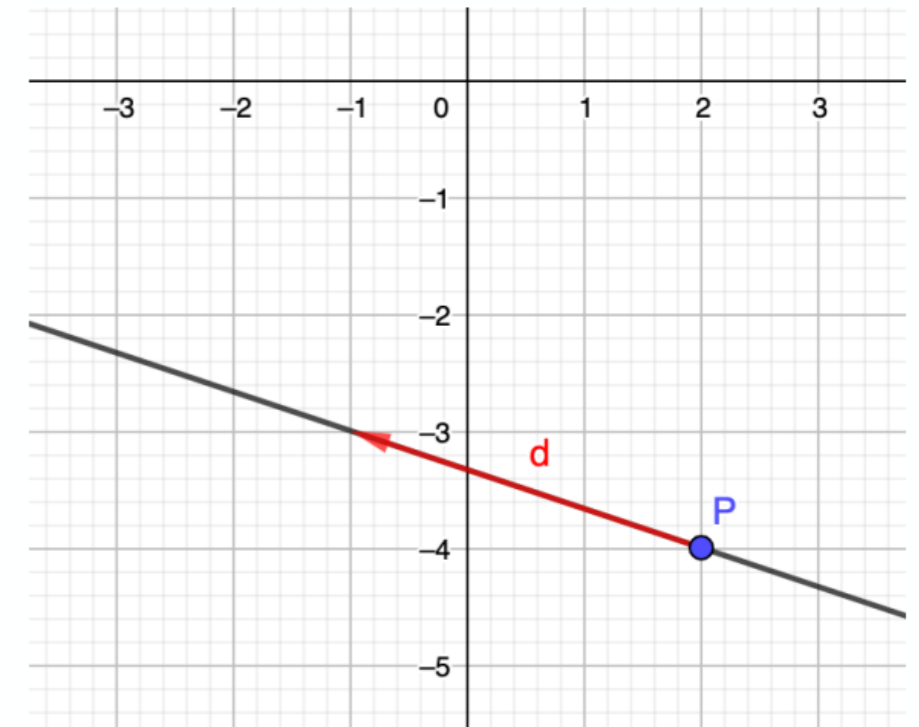
$$\begin{cases} x(t) = p_x + d_x t \\ y(t) = p_y + d_y t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

À chaque valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ correspond un point sur la droite.

Par exemple, le système d'équations

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 3t \\ y(t) = -4 + t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

représente une droite qui passe par le point $P(2, -4)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (-3, 1)$.



Paraboles dans le plan

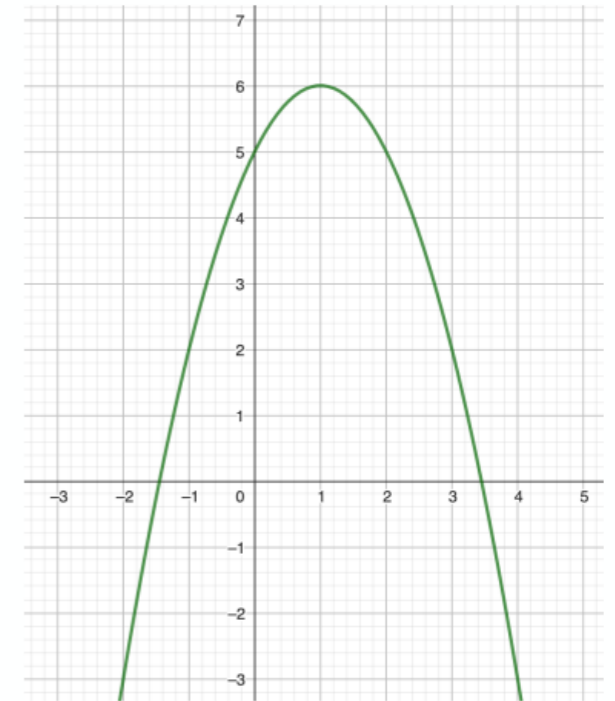
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ trois constantes réelles. Une **représentation paramétrique d'une parabole** est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = at^2 + bt + c \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

En général, toute fonction continue f peut être utilisée pour générer une représentation paramétrique d'une courbe en définissant le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ on obtient un point situé sur la courbe.



Cercles dans le plan

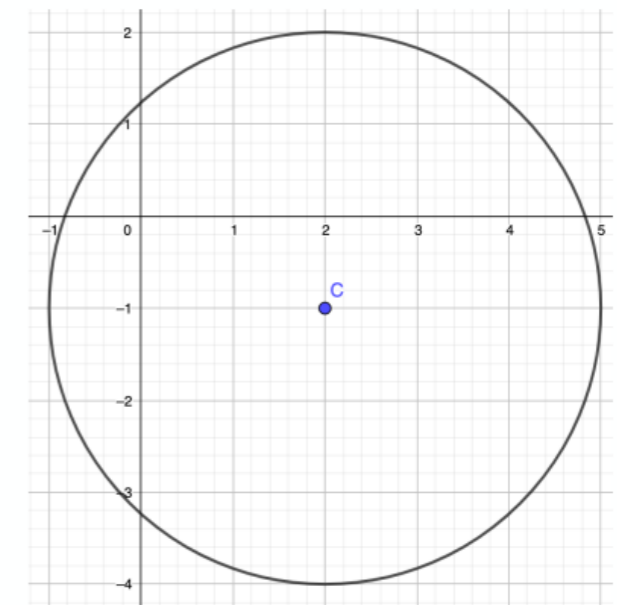
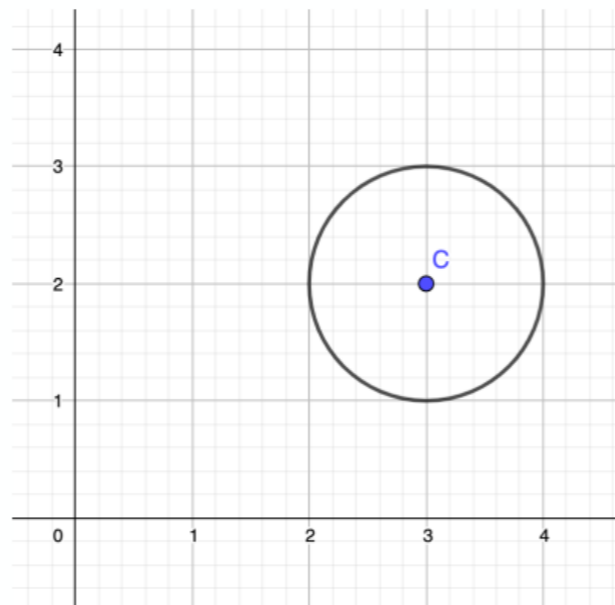
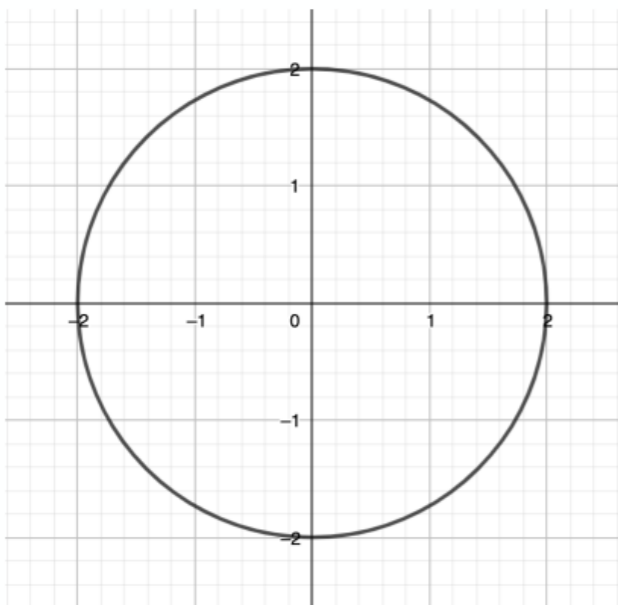
Une **représentation paramétrique d'un cercle centrée dans l'origine** et de rayon $r > 0$ est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y(t) = r \cdot \sin(t) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0, 2\pi[.$$

De même, une **représentation paramétrique d'un cercle centrée dans le point $C(c_x, c_y)$** et de rayon $r > 0$ est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = c_x + r \cdot \cos(t) \\ y(t) = c_y + r \cdot \sin(t) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0, 2\pi[.$$

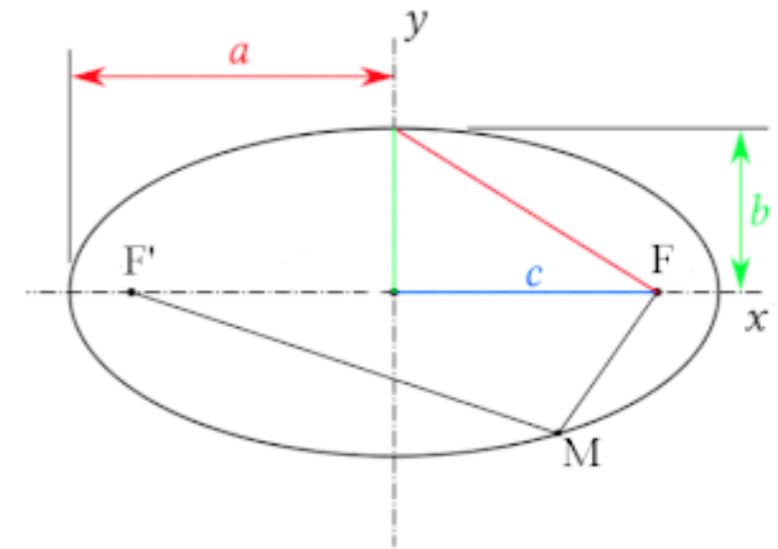
Remarque : un cercle n'est pas le graphe d'une fonction !



Quelques courbes planes

1. **Ellipse** de centre $C(x_0, y_0)$ et de demi-axes a et b :

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$



2. **Hyperbole** de centre $C(h, k)$

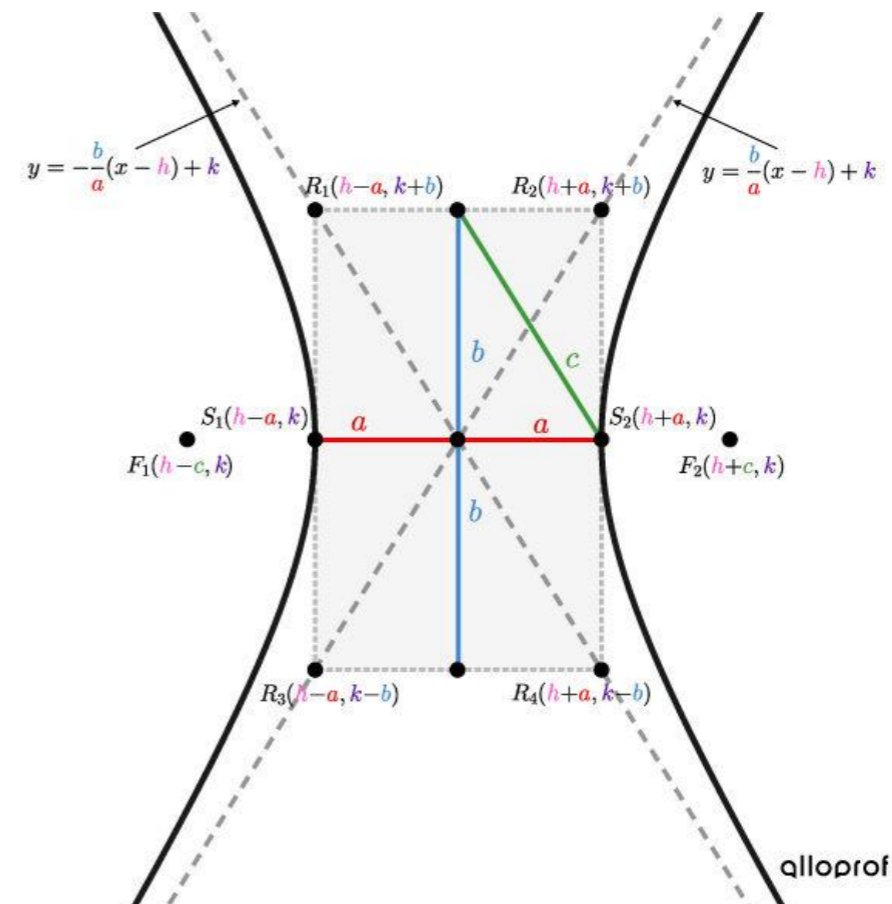
et d'asymptotes $y = \pm \frac{b}{a} \cdot (x - h) + k$

$$\left(\frac{x - h}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - k}{b}\right)^2 = 1$$

Sommets : $S_1(h + a, k)$ et $S_2(h - a, k)$

Foyers : $F_1(h + c, k)$ et $F_2(h - c, k)$

avec $c^2 = a^2 + b^2$



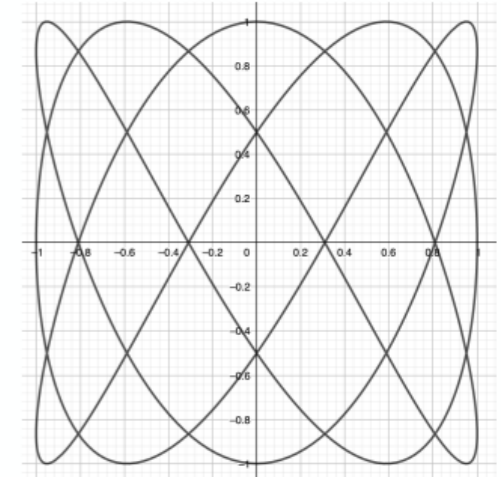
Exemples *exotiques*

Courbes de Lissajous

Les courbes de Lissajous (ou courbes de Bowditch) sont données par la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a \sin(\omega_x t + \phi_x) \\ y(t) = b \sin(\omega_y t + \phi_y) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0, 2\pi[$$

où $a, b, \omega_x, \omega_y > 0$, $n \geq 1$ et $0 \leq \phi_x, \phi_y \leq \pi/2$. En électronique, on peut faire apparaître des figures de Lissajous sur un oscilloscope.



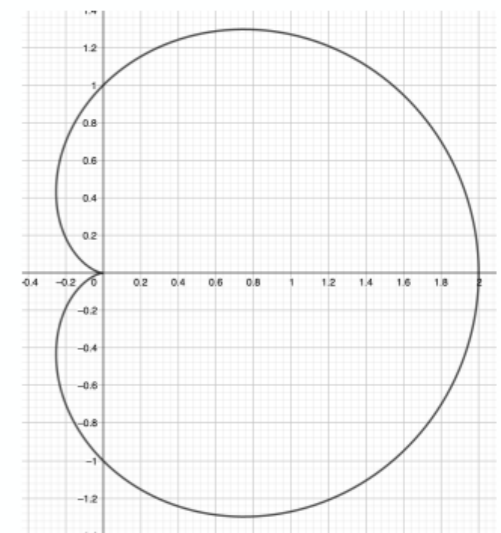
$$\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \sin(5t + \pi/2) \end{cases}$$

Cardioïde

La trajectoire d'un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur un second cercle de même diamètre décrit une courbe appelée cardioïde. Une paramétrisation de la cardioïde est :

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cos \theta (1 + \cos \theta) \\ y(\theta) = a \sin \theta (1 + \cos \theta) \end{cases} \quad \text{où } \theta \in [0, 2\pi[$$

où $a > 0$.



$$\begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) \\ y(\theta) = \sin(\theta)(1 + \cos(\theta)) \end{cases}$$

Pour de nombreux autres exemples de courbes dans le plan, visitez le site web : <https://mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml>

Représentation sous forme cartésienne

On peut *parfois*, en éliminant le paramètre entre les deux équations du système qui définit la courbe, obtenir y comme fonction de x , et ramener l'étude de la courbe à celle d'une courbe définie par une fonction $y = f(x)$.

Forme cartésienne explicite :

Nous représentons une courbe plane via l'équation :

$$y = f(x)$$

c'est-à-dire comme fonction d'une variable indépendante. À chaque valeur x correspond une valeur y , tel que le point (x, y) appartient à la courbe.

Forme cartésienne implicite :

Une courbe peut également être représentée sous la forme :

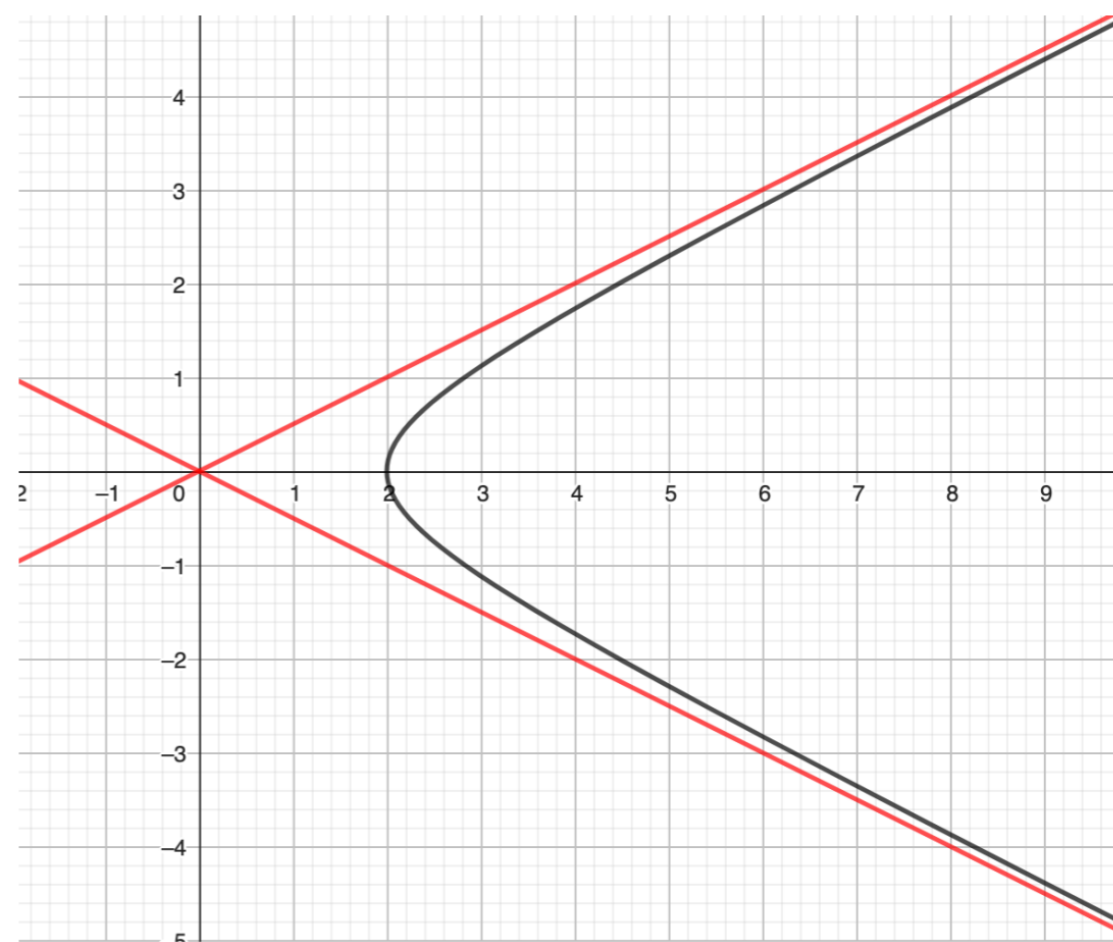
$$F(x, y) = 0$$

c'est-à-dire comme fonction de deux variables indépendantes.

Exercice

- a. On considère les fonctions suivantes : $x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \cos(2t)$, où $t \in \mathbb{R}$.
Exprimer y en fonction de x et en déduire la *nature* de la courbe obtenue.
- b. On considère les fonctions suivantes : $x(t) = 2\cosh(t)$ et $y(t) = \sinh(t)$, où $t \in \mathbb{R}$.
Exprimer y en fonction de x et en déduire la *nature* de la courbe obtenue.

Exercice



Résumé des trois représentations

- ❖ La meilleure représentation est sans aucun doute la **représentation paramétrée**. Cette représentation est également utile pour étudier les problèmes dynamiques puisqu'elle a une notion de vitesse de déplacement le long de la courbe.
- ❖ La **représentation en forme implicite** est, selon certains points de vue, meilleure que la représentation explicite. Cependant, on peut rencontrer des problèmes quand il faut expliciter l'une des deux variables en fonction de l'autre : souvent, c'est très compliqué, quand ce n'est pas impossible.
- ❖ La **représentation en forme explicite** a de nombreuses limites géométriques, du fait que très souvent, une courbe a une description très complexe sous cette forme, qui n'est donc pas adaptée à l'étude des propriétés géométriques.

Cardioïde : forme cartésienne

La cardioïde est donnée sous forme paramétrique par

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot (1 + \cos \theta) \cdot \cos \theta \\ y(t) = a \cdot (1 + \cos \theta) \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Pour trouver la forme cartésienne implicite (éliminer θ) on calcule:

$$x^2 = a^2 \cdot (1 + \cos \theta)^2 \cdot \cos^2 \theta \quad y^2 = a^2 \cdot (1 + \cos \theta)^2 \cdot \sin^2 \theta$$

Donc $x^2 + y^2 = a^2 \cdot (1 + \cos \theta)^2$ et alors

$$x^2 + y^2 - ax = a^2 \cdot (1 + \cos \theta)^2 - a^2 \cdot (1 + \cos \theta) \cdot \cos \theta = a^2 \cdot (1 + \cos \theta)$$

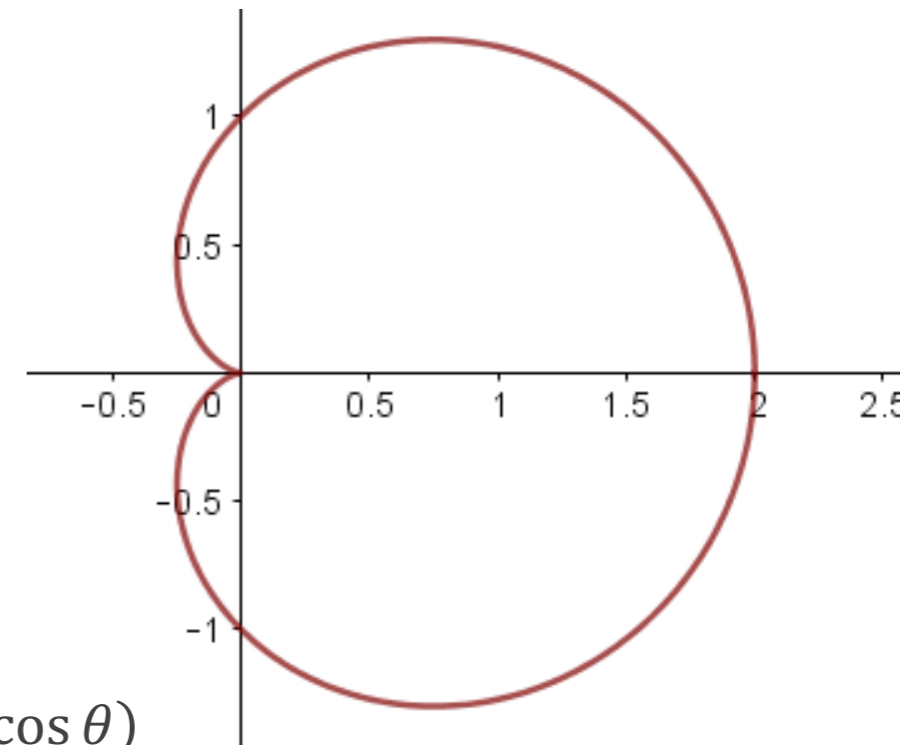
ce qui donne $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^4 \cdot (1 + \cos \theta)^2 = a^2 \cdot (x^2 + y^2)$

L'équation cartésienne implicite de la cardioïde est donc

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2 \cdot (x^2 + y^2)$$

que l'on peut aussi écrire

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax \cdot (x^2 + y^2) - a^2 y^2 = 0$$



Vecteur tangent

❖ Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrique :

$$c(t) = (x(t), y(t))$$

où $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables.

❖ Le **vecteur tangent à la courbe** en $P = \gamma(t_0)$ est défini comme le vecteur :

$$c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

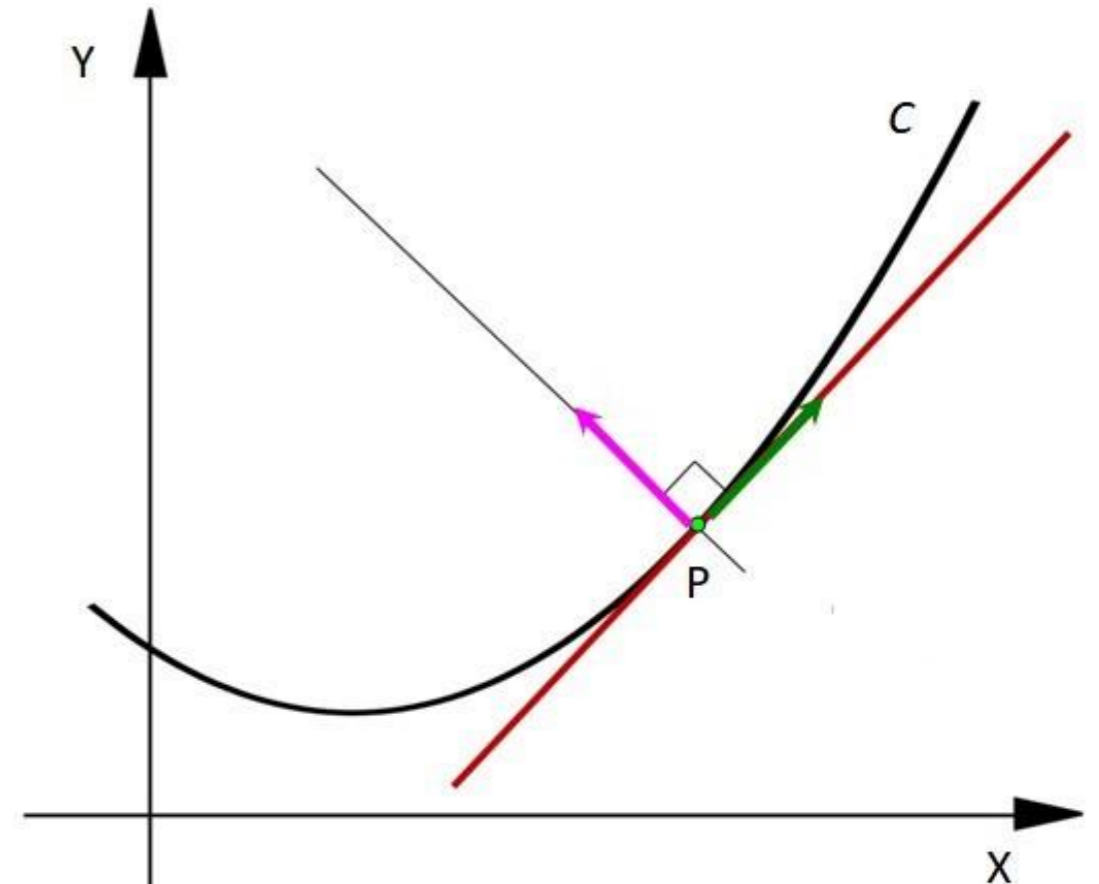
❖ Le **vecteur normal à la courbe** en $P = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^2$ est défini comme le vecteur :

$$n(t_0) = (-y'(t_0), x'(t_0))$$

❖ La **pente de la droite tangente** à la courbe en $P = \gamma(t_0)$ est donnée par

$$m(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \quad \text{si } x'(t_0) \neq 0$$

- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors le vecteur tangent (donc la tangente) est vertical !
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$ alors le vecteur tangent (donc la tangente) est horizontal !



Spirales logarithmiques

La **spirale logarithmique** est donnée par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = r e^{kt} \cos t \\ y(t) = r e^{kt} \sin t \end{cases} \quad r > 0, \quad k > 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Le vecteur tangent est donné par

$$c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r e^{kt} \cdot (k \cos t - \sin t) \\ r e^{kt} \cdot (k \sin t + \cos t) \end{pmatrix}$$

Si on fait le produit scalaire du vecteur position $c(t)$ par le vecteur tangent $c'(t)$ on trouve

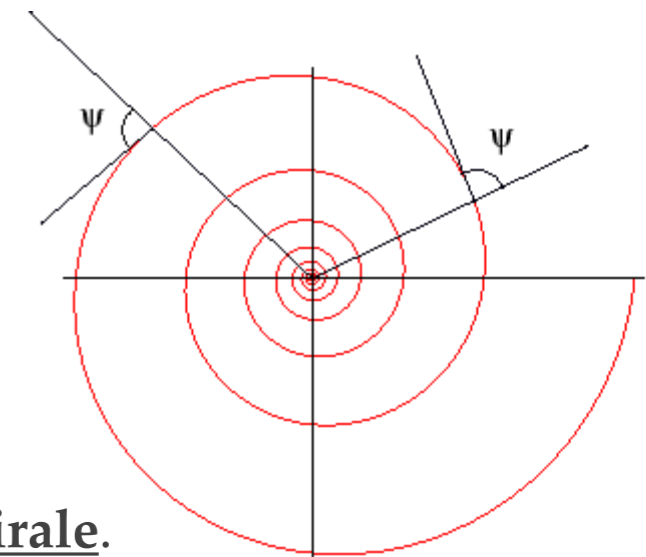
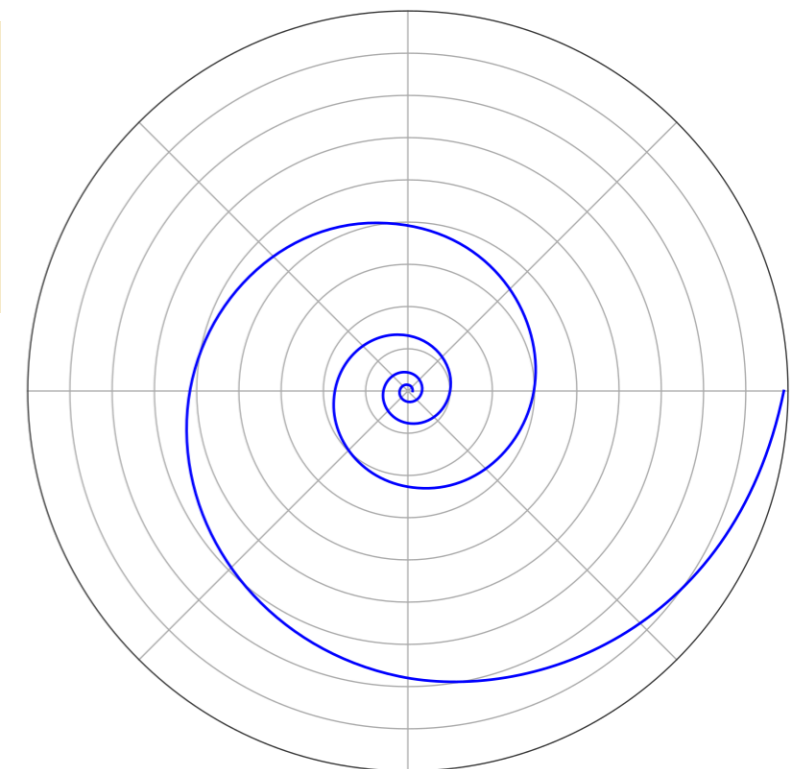
$$\begin{aligned} c(t) \cdot c'(t) &= r e^{kt} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot r e^{kt} \begin{pmatrix} k \cos t - \sin t \\ k \sin t + \cos t \end{pmatrix} = \\ &= r^2 \cdot e^{2kt} \cdot (k \cos^2 t - \cos t \sin t + \sin t \cos t + k \sin^2 t) = k r^2 \cdot e^{2kt} \end{aligned}$$

L'angle entre le vecteur tangent $c'(t)$ et le vecteur position $c(t)$ vérifie donc

$$\cos \Psi = \frac{k r^2 \cdot e^{2kt}}{\|c(t)\| \cdot \|c'(t)\|} = \frac{k r^2 \cdot e^{2kt}}{r e^{kt} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot r e^{kt}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \quad \rightarrow \quad \tan \Psi = \frac{1}{k}$$

L'angle Ψ est indépendant de t et est donc le même pour tous les points de la spirale.

Ces spirales sont appelées des **spirales équiangles**.



Exemple

Courbe : $c(t) = (t^2, t^3)$

Exercice

Trouver l'équation de la tangente à la courbe (γ): $x^3y^2 + y^3 + x^2 - 4x - 5y + 1 = 0$ au point $P(1,2)$.

Différentiation d'une équation implicite

Soit γ une courbe donnée sous forme cartésienne implicite

$$(c) : F(x, y) = 0$$

Pour calculer la **pen**te de la tangente à c , on considère y comme une fonction de variable x , c'est-à-dire $y = y(x)$, et on dérive l'équation implicite $F(x, y) = 0$ par rapport à x .

La dérivée de y devient alors y' . En isolant y' on obtient une formule qui donne y' en fonction des deux coordonnées x et y :

$$y' = y'(x, y)$$

Un **vecteur tangent** en un point $P(x_P, y_P)$ de la courbe est alors $c'(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_P, y_P) \end{pmatrix}$

Exemple

Considérons la courbe d'équation cartésienne implicite $x^2 - 2y^3 = 4$

En considérant y comme fonction de x , $y = y(x)$ et en dérivant l'équation de la courbe par rapport à x on obtient

$$2x - 6y^2 \cdot y' = 0$$

En isolant y' ceci donne

$$y' = \frac{2x}{6y^2} = \frac{x}{3y^2}$$

Aux points $P_1(-2, 0)$ et $P_2(2, 0)$, les tangentes sont verticales. Au point $Q(0, \sqrt[3]{2})$, la tangente est horizontale.

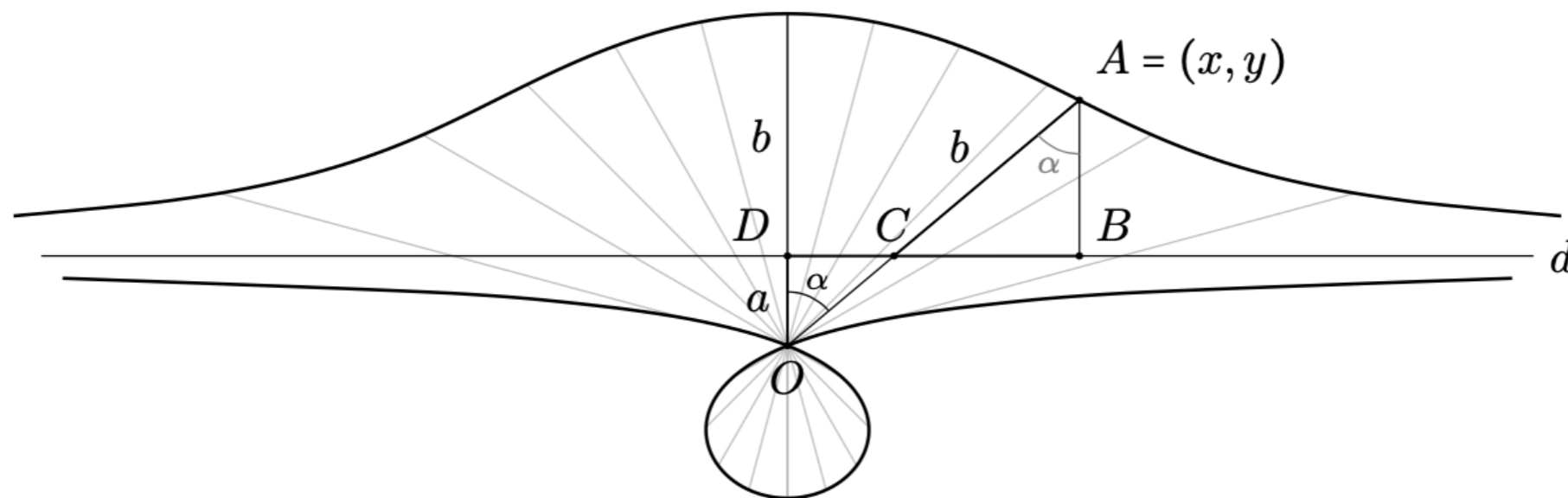
Au point $S(\sqrt{2}, -1)$, la pente de la tangente vaut $m_S = \frac{\sqrt{2}}{3 \cdot (-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

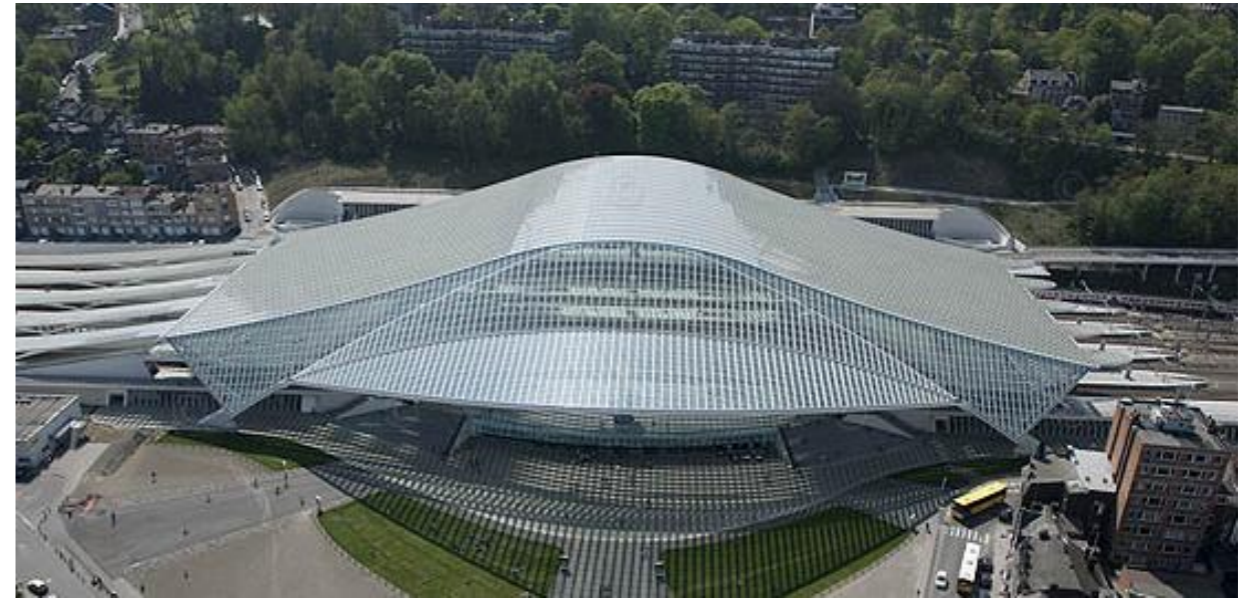
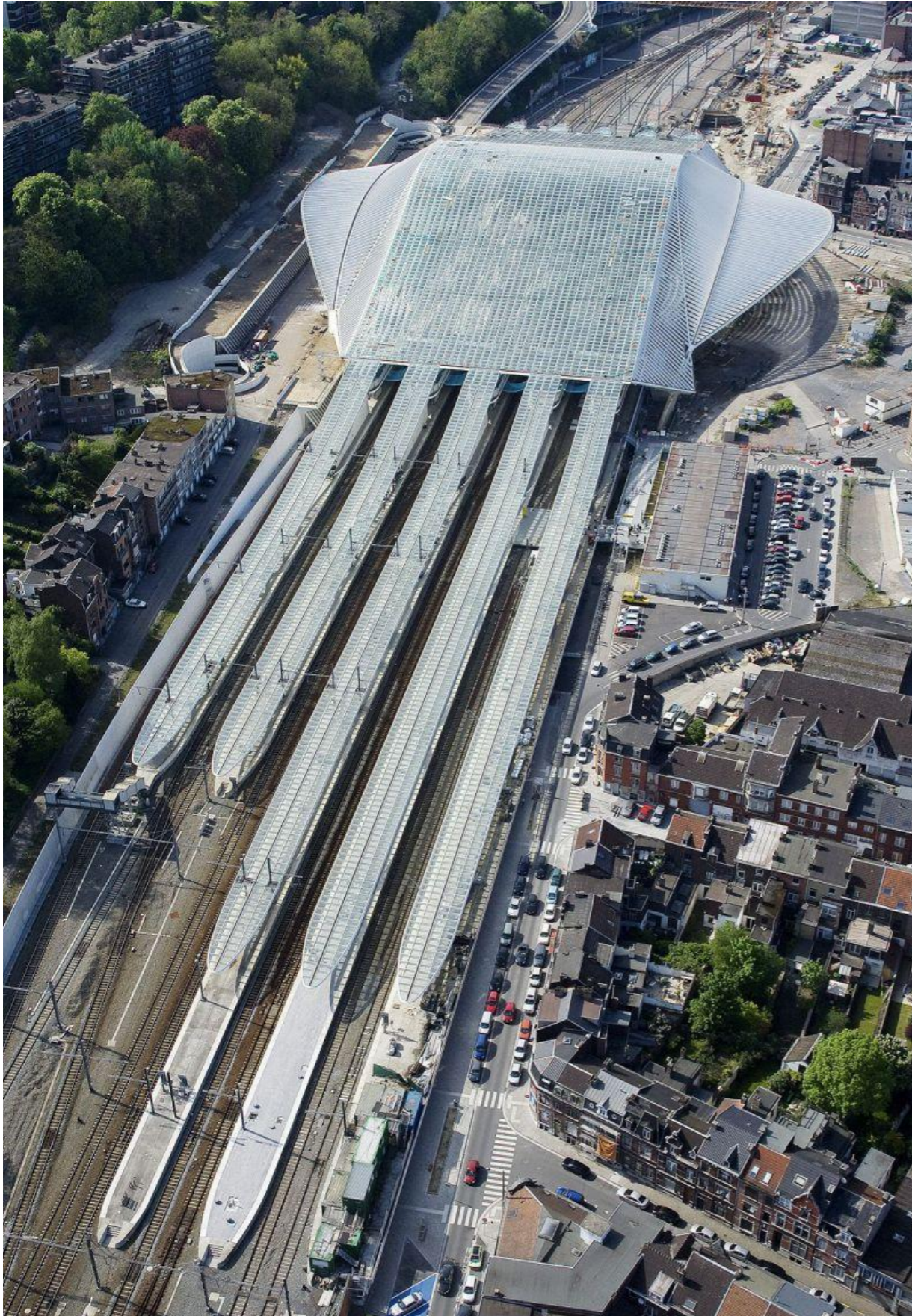
Résumé : vecteur tangent

Forme	Equation de la courbe	Vecteur tangent en P
paramétrique	$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$	$c' \Big _P = c'(t_P) = \begin{pmatrix} x'(t_P) \\ y'(t_P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix}$
Cartésienne explicite	$y = f(x)$	$c' \Big _P = c'(x_P) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_P) \end{pmatrix}$
Cartésienne implicite	$F(x, y) = 0$	$c' \Big _P = c'(x_P, y_P) = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_P, y_P) \end{pmatrix}$

Conchoïde de Nicomède

- ❖ Donnés deux nombres $a, b > 0$ on considère un point O qui, pour simplifier l'exposé, sera considéré comme coïncidant avec l'origine.
- ❖ Soit d une droite horizontale à une distance a de O et s une demi-droite issue de O qui forme un angle de α avec la verticale.
- ❖ Soit C le point d'intersection de la demi-droite s avec la droite d .
- ❖ Depuis C on mesure une distance de b le long de la demi-droite s pour obtenir un point A .
- ❖ Le lieu des points A déterminé en faisant varier l'angle α est la conchoïde de Nicomède.
- ❖ Lorsque l'angle $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ la distance b sur la demi-droite s est prise dans la direction de O .



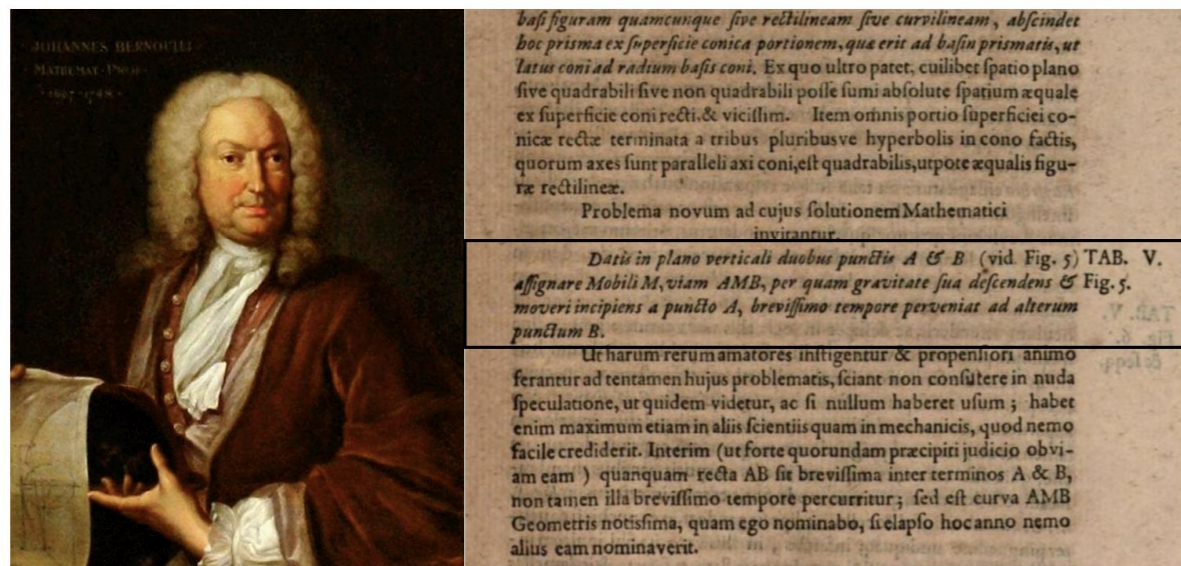
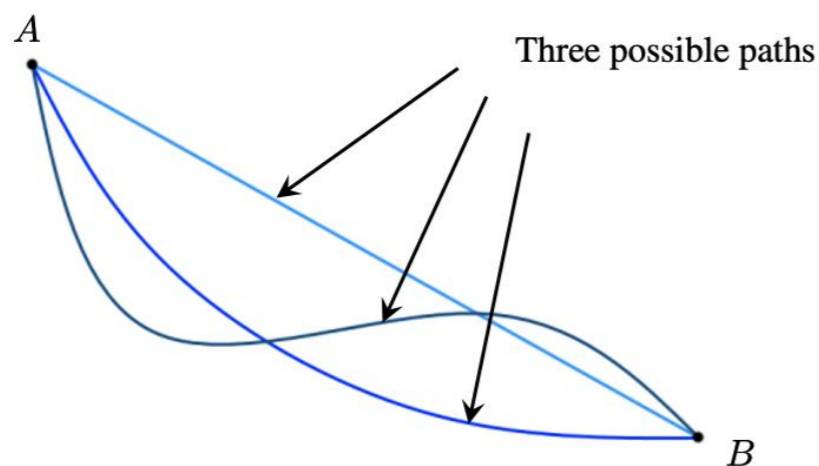


*Gare de Liège-Guillemins
œuvre de l'architecte espagnol Santiago Calatrava*

La brachistochrone

En juin 1696, le célèbre mathématicien *Johann Bernoulli* a publié dans les *Acta Eruditorum*, le premier périodique scientifique allemand, le problème suivant :

Étant donné deux points A et B dans un plan vertical, quelle est la courbe tracée par un point soumis à la seule gravité, qui part de A et atteint B dans le temps le plus court.



- ❖ Ce défi mathématique est connu sous le nom de problème de la brachistochrone. Même si *Johann Bernoulli* savait déjà comment le résoudre lui-même, il a lancé un défi aux autres mathématiciens d'Europe et leur a accordé six mois pour le résoudre.
- ❖ Après ce délai, aucune réponse n'a été donnée. Même *Gottfried Leibniz* a demandé une prolongation du délai. L'après-midi du 29.1.1697, *Isaac Newton* a trouvé le défi dans son courrier. Il l'a ensuite résolu pendant la nuit et a envoyé la solution de manière anonyme.
- ❖ Les équations paramétriques de la brachistochrone pour $A(0,0)$ et $B(\pi, -2)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta - \sin(\theta) \\ y(\theta) = -1 + \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{où} \quad \theta \in [0, \pi]$$



Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

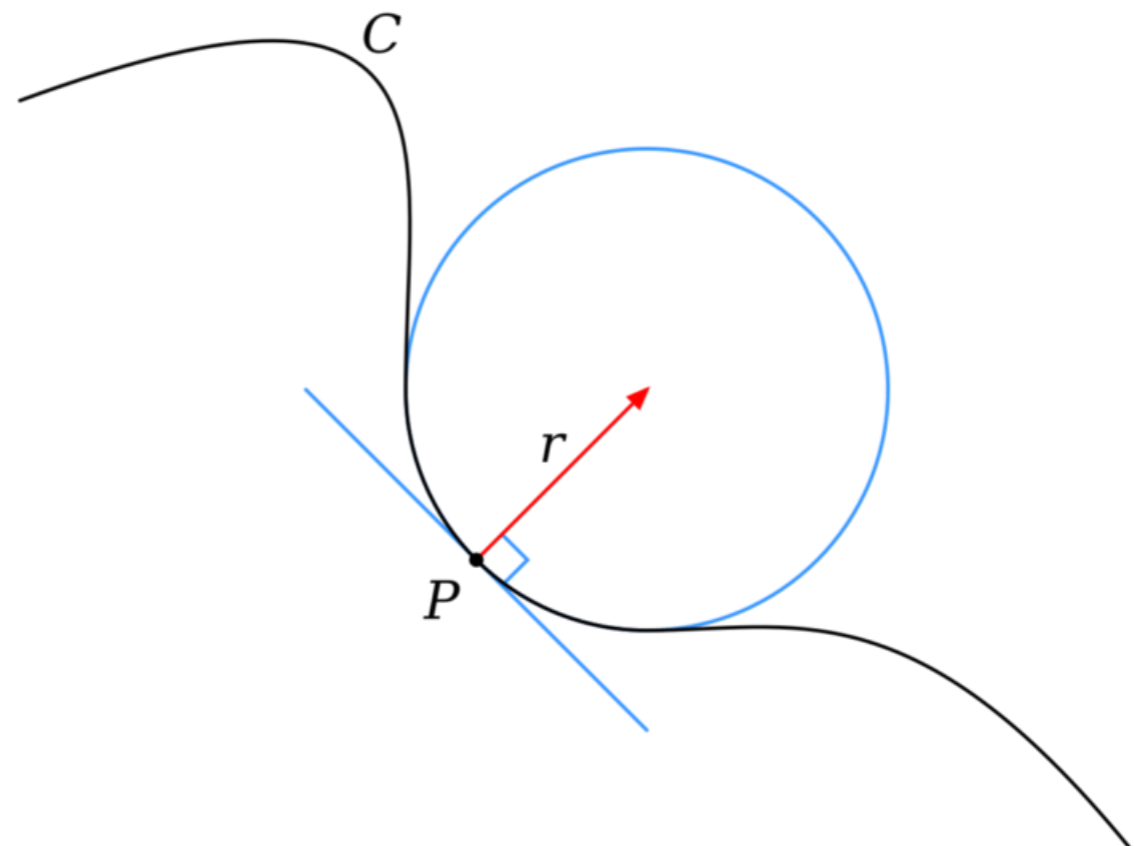
Courbure d'une courbe plane

Philippe Chabloz

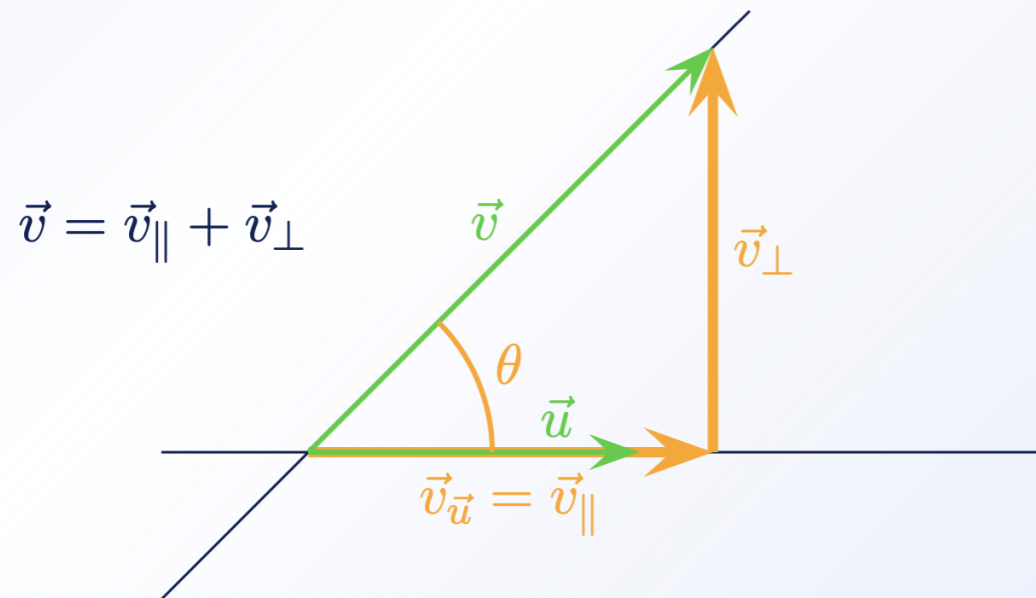
Courbure d'une courbe plane

- La **courbure** mesure la manière dont une courbe s'éloigne localement d'une ligne droite.
- La courbure est égale au rapport entre la variation de la direction de la tangente à la courbe et un déplacement *d'une longueur infinitésimale* sur celle-ci : plus ce rapport est important, plus la courbure est importante.
- *Intuitivement* : la courbure indique de combien il faut tourner le volant d'une voiture pour aborder un virage (volant tourné modérément pour une courbure faible et fortement pour une courbure forte).

$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{d\theta}{ds}$$



Rappel et notation



$$\|\vec{v}_{\perp}\| = \frac{|\det(\vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u}\|}$$

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. On définit le vecteur $J(\vec{u}) = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ qui a les 3 propriétés suivantes:

1. $J(\vec{u}) \perp \vec{u}$
2. $\|J(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$
3. La base $\mathcal{B}(\vec{u}, J(\vec{u}))$ est directe $\iff \det(\vec{u}, J(\vec{u})) > 0$

Courbure et accélération

Soit c une courbe paramétrée et P un point sur cette courbe. On note ou définit (tout au point P):

$\vec{c}'_P = \vec{c}'(t_P)$ le vecteur tangent ou vecteur vitesse

$v_P = \|\vec{c}'_P\|$ la vitesse scalaire

$\vec{T}_P = \frac{\vec{c}'_P}{v_P}$ le vecteur tangent unitaire

$\vec{N}_P = J(\vec{T}_P)$ le vecteur normal unitaire

\vec{c}''_P le vecteur accélération

On peut décomposer le vecteur accélération dans la base $\mathcal{B}(\vec{T}_P, \vec{N}_P)$ qui est directe. On obtient alors

$$\vec{c}''_P = \vec{c}''_{\parallel} + \vec{c}''_{\perp}$$

Le terme \vec{c}''_{\parallel} est l'accélération tangentielle. Il est **non nul** (en P) si c' change de norme (en P) \rightarrow la vitesse scalaire change en P .

Le terme \vec{c}''_{\perp} est l'accélération centripète. Il est **non nul** (en P) si c' change de direction (en P) \rightarrow courbure !!

Courbure et accélération

On peut montrer que l'accélération centripète \vec{c}''_{\perp} dépend du paramétrage et donc de la vitesse.

En fait **sa norme $\|\vec{c}''_{\perp}\|$ est proportionnelle à v^2** .

En effet supposons que l'on parcourt la courbe 3 fois plus vite : $c(s) = c(3t)$. En dérivant 2 fois on obtient:

$$c'(s) = 3 \cdot c'(3t) \quad \text{puis} \quad c''(s) = 3^2 \cdot c''(3t)$$

(Dans un rond-point de rayon donné, plus on roule vite, plus l'accélération centripète est grande : elle croît selon v^2 . C'est ce qui explique qu'avec des pneus donnés (une adhérence donnée), il y a une vitesse limite dans un virage)

Pour avoir la courbure de la courbe c qui ne dépende pas de la vitesse de parcours de la courbe, il faut diviser la norme de \vec{c}''_{\perp} par v^2 . Ainsi on définit la courbure comme

$$\kappa = \frac{\|\vec{c}''_{\perp}\|}{v^2}$$

Par le rappel du slide 25 on a

$$\|\vec{c}''_{\perp}\| = \frac{\det(\vec{c}', \vec{c}'')}{\|\vec{c}'\|} = \frac{\det(\vec{c}', \vec{c}'')}{v}$$

En combinant les deux on a :

$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{\det(\vec{c}', \vec{c}'')}{v^3}$$

Courbure d'une courbe plane

Soit c une courbe sous forme paramétrique

$$c(t) = (x(t), y(t))$$

- Alors le **vecteur tangent (ou vecteur-vitesse)** est $c'(t) = (x'(t), y'(t))$

et

$$v(t) = \|c'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

- Le **vecteur accélération** vaut $c''(t) = (x''(t), y''(t))$

- Donc

$$\det(c', c'') = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = x'y'' - x''y'$$

➤ On obtient alors la courbure

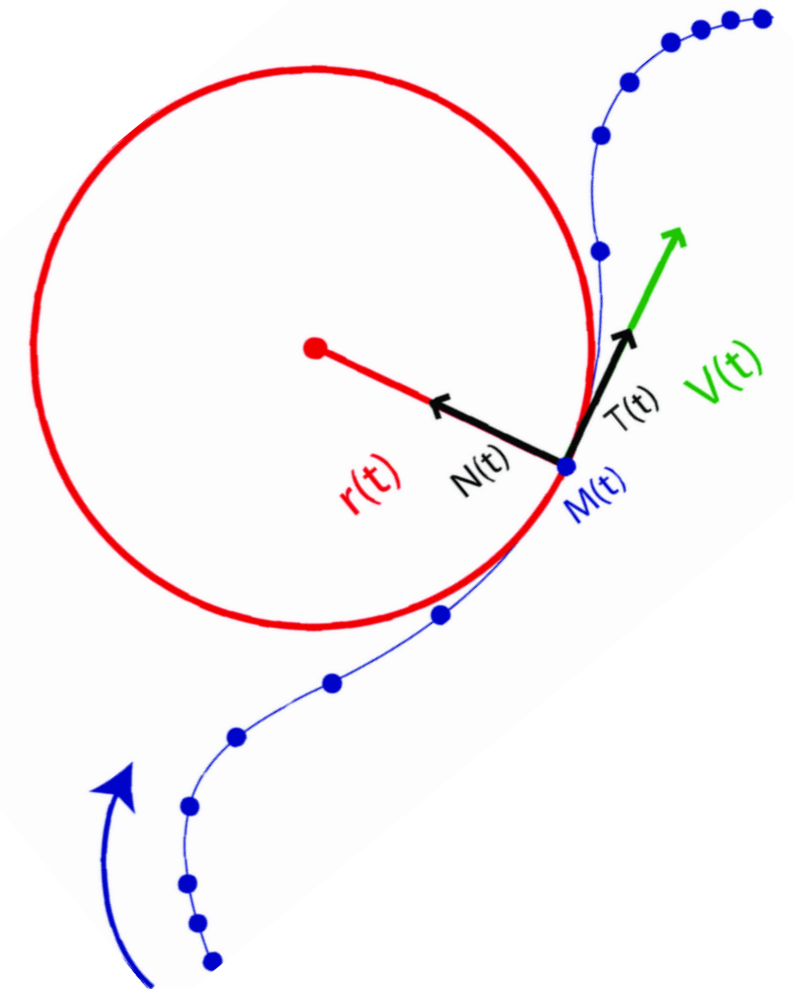
$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{\det(c', c'')}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Courbure d'une courbe plane

$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{1}{v^3} \mathbf{c}'' \cdot \vec{N} = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

On peut démontrer que la valeur absolue de la courbure en un point $c(t)$ est indépendante du paramétrage. C'est donc bien une **caractéristique intrinsèque à la courbe** qui ne dépend pas de la « vitesse de parcours » de cette courbe.

C'est le terme en v^3 au dénominateur qui assure ceci !!



La courbure a un signe qui dépend du sens de parcours de la courbe !!

Si $\kappa > 0$ la courbe tourne dans le **sens trigonométrique pour la paramétrisation donnée**

Si $\kappa < 0$ la courbe tourne dans le **sens inverse du sens trigonométrique pour la paramétrisation donnée.**

Si on change le sens de parcours, \vec{T} et \vec{N} change de sens et la courbure change de signe.

Exemple

Soit le cercle de centre $C(a, b)$ et de rayon R . Calculer la courbure en tout point du cercle

Cercle de courbure

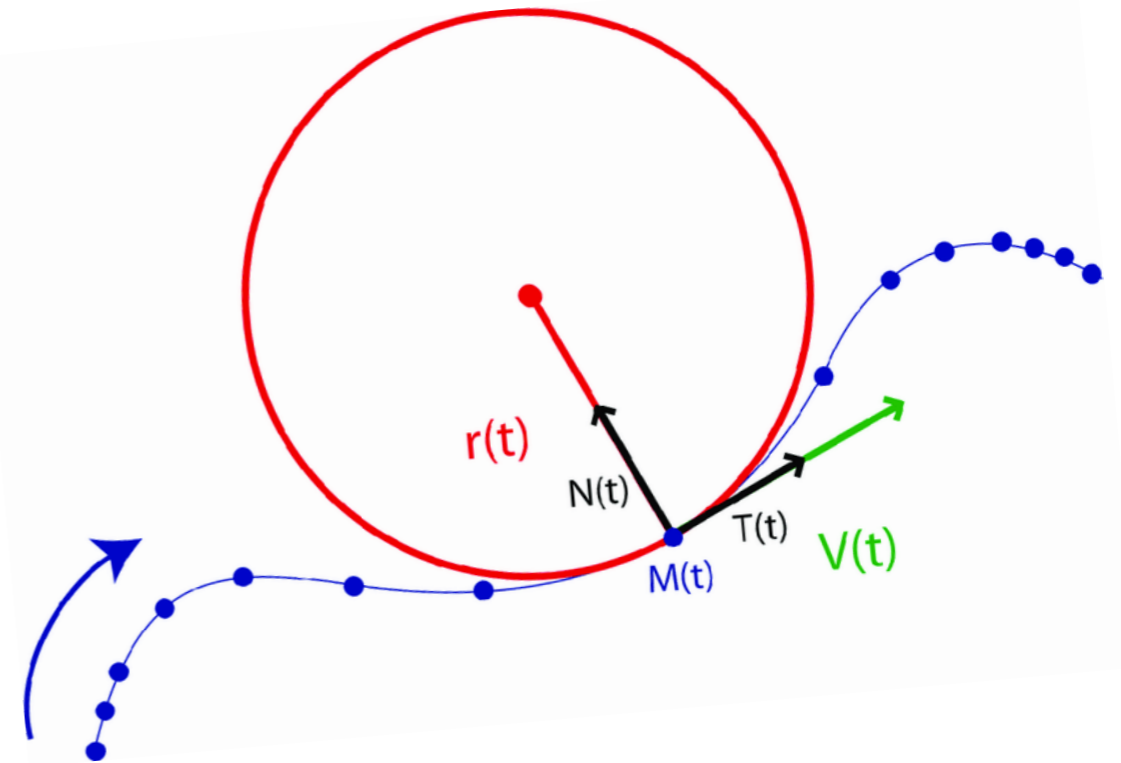
Définitions:

Le cercle rouge à droite se nomme le **cercle osculateur** de la courbe au point P .

Le centre du cercle osculateur en P est appelé **centre de courbure** (en P) et le rayon du cercle osculateur est appelé le **rayon de courbure** (en P).

Par le résultat du slide précédent on a que le rayon de courbure au point P est égal à l'inverse de la courbure (en valeur absolue):

$$r_P = \frac{1}{|\kappa_P|}$$



Courbure d'une courbe plane

Soit un arc de cercle de rayon r et un petit angle $d\theta$. La longueur de l'arc de cercle vaut alors

$$ds = r \cdot d\theta$$

Comme la courbure est l'inverse du rayon de courbure ceci donne

$$ds = \frac{1}{\kappa} \cdot d\theta$$

Et donc

$$\kappa ds = d\theta$$

et enfin

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

Ainsi la courbure peut être interprétée comme le **taux de rotation du vecteur tangent par unité de longueur**.

Courbure : forme cartésienne

$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{1}{v^3} \mathbf{c}'' \cdot \vec{N} = \frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Si la courbe est donnée sous forme cartésienne explicite

$$y = f(x)$$

alors la **paramétrisation standard** (voir slide 5)

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

donne $x'(t) = 1$, $x''(t) = 0$, $y'(t) = f'(t)$ et $y''(t) = f''(t)$

puis $\mathbf{c}'(t) = (1, f'(t))$ et donc $v = \sqrt{1 + f'(t)^2}$

La courbure en un point $P(a, f(a))$ vaut alors

$$\kappa(a) = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3} = \frac{f''(a)}{(1 + f'(a)^2)^{3/2}}$$

Exemple

Soit la courbe définie par l'équation $y = x^2$ (parabole).

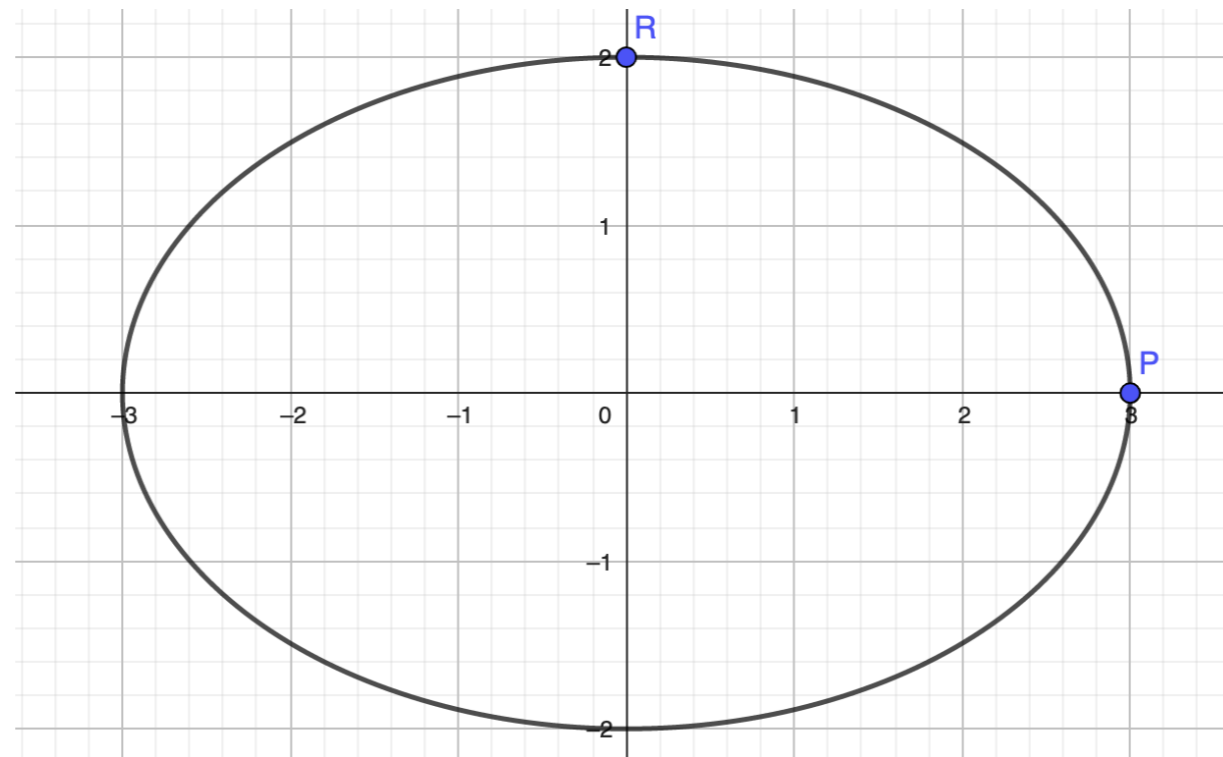
Calculer la courbure à l'origine $O(0,0)$ et au point $P(1,1)$.

Exercice

Soit l'ellipse définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(\theta) = 3\cos(\theta) \\ y(\theta) = 2\sin(\theta) \end{cases} \quad \text{où } \theta \in [0, 2\pi].$$

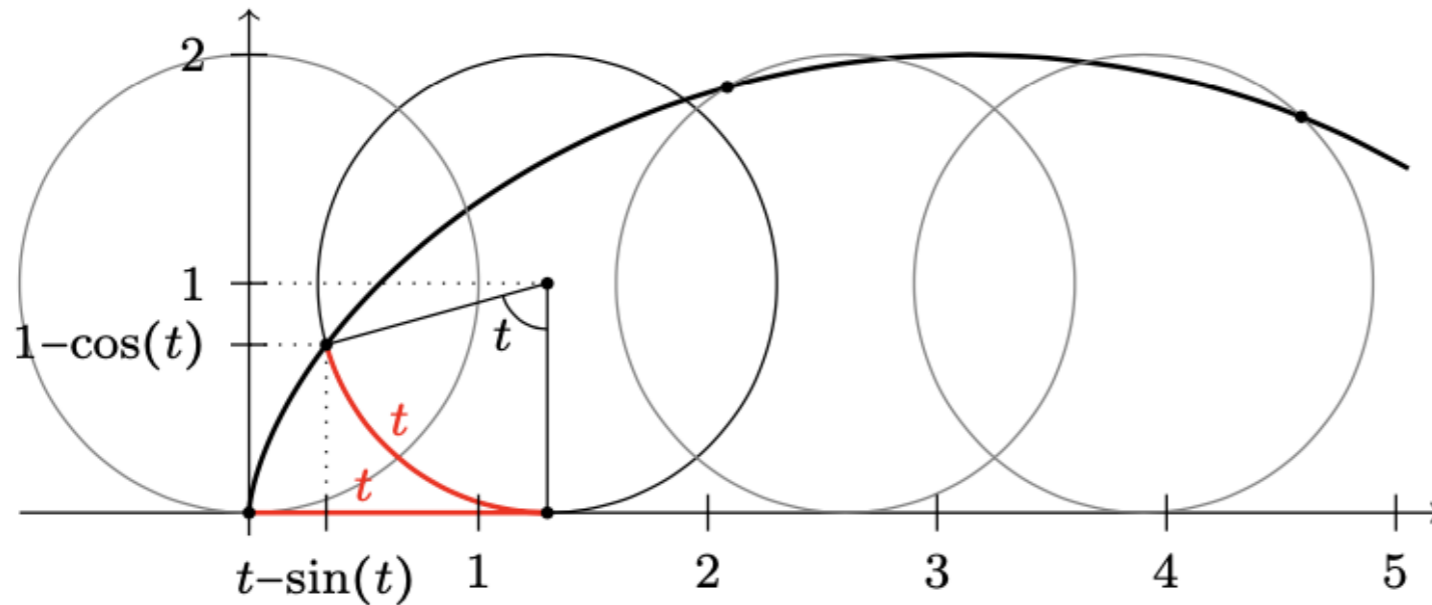
Calculer la courbure aux points $P(3,0)$ et $R(0,2)$.



Exercice

Soit la courbe définie par l'équation $y = x^3$. Calculer la courbure, ainsi que le rayon de courbure aux points $P(1,1)$ et $Q(2,8)$.

La cycloïde



La cycloïde est une courbe plane, trajectoire d'un point fixé à un cercle (de rayon 1) qui roule sans glisser sur une droite.

La courbe peut être définie paramétriquement par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

ce qui correspond à l'équation cartésienne :

$$x = \arccos(1 - y) - \sin(\arccos(1 - y)).$$