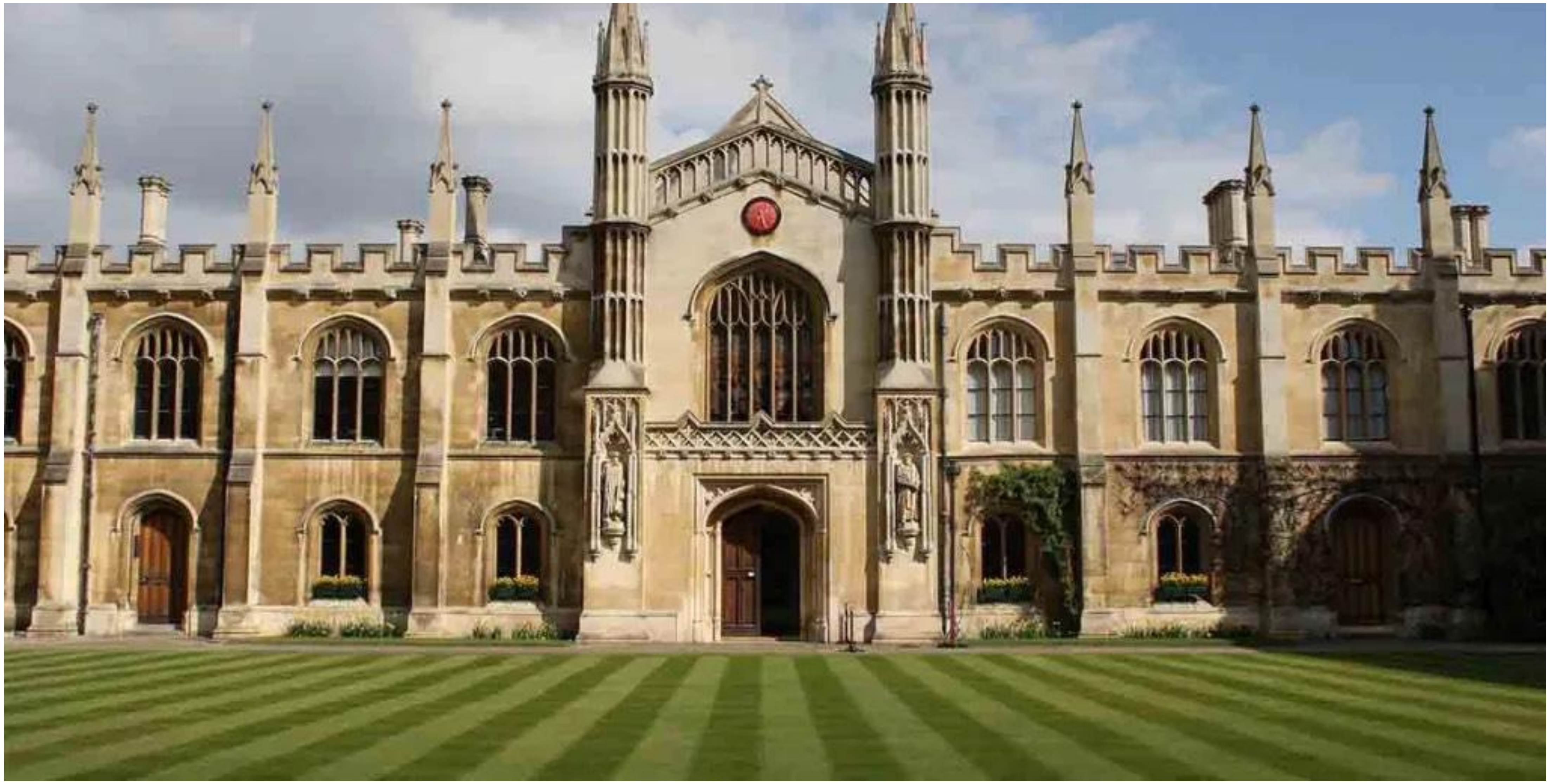


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Fonctions polynomiales

Philippe Chabloz

Fonctions polynomiales

Les fonctions polynomiales sont des fonctions mathématiques fondamentales qui apparaissent dans des contextes allant de la chimie et de la physique de base à l'économie et aux sciences sociales.

- Un **polynôme** de variable $\boldsymbol{X}$ est une expression de la forme :

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

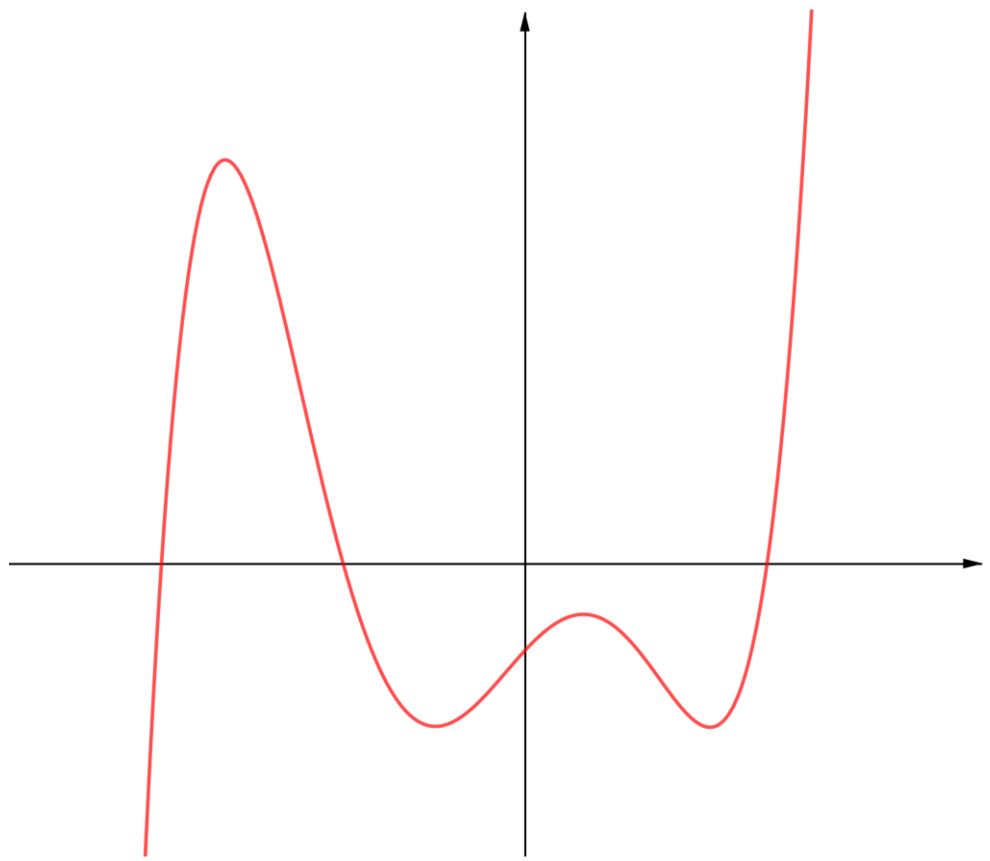
où les $a_i \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

- Lorsque $a_n \neq 0$ on dira que le polynôme est de **degré** n.

- Une **fonction polynomiale** une fonction donnée par l'expression suivante :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- Le graphique d'une fonction polynomiale peut se comporter de différentes manières. En règle générale, plus le degré est élevé, plus le graphique aura des oscillations.



Un exemple de graphique d'une fonction polynomiale de degré 5

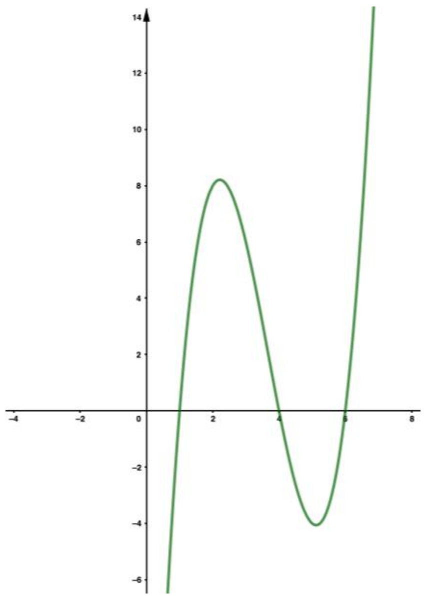
Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème de d'Alembert-Gauss (*version réelle*).

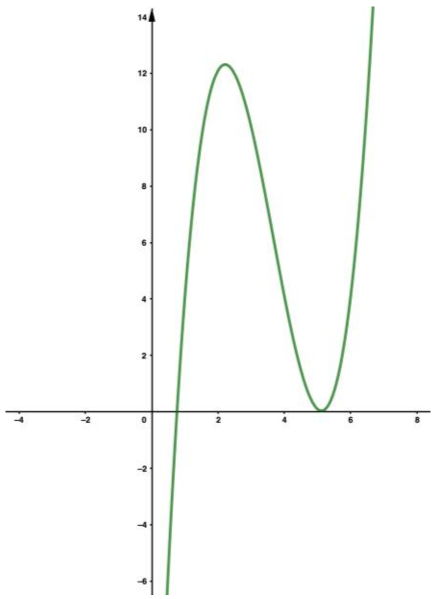
Toute fonction polynomiale non constante à coefficients réels de degré n admet *au plus* n racines réelles.

De plus si n est impair, alors la fonction admet au moins une racine

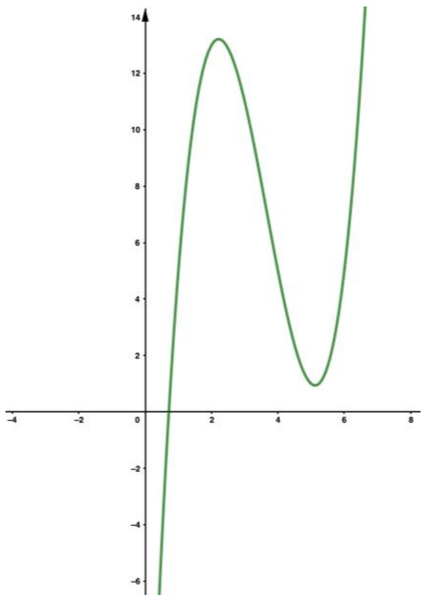
Exemple : fonction polynomiale du 3e degré.



3 racines



2 racines



1 racine

Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème de d'Alembert-Gauss (*version complexe*).

Tout polynôme à coefficients complexes de **degré n** admet toujours **n racines complexes** (en tenant compte de leurs multiplicités).

Autrement dit tout polynôme à coefficients complexes de degré n

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

se décompose (ou se scinde) en produit de polynômes du 1er degré:

$$P(X) = (X - r_1) \cdot (X - r_2) \cdots (X - r_n)$$

où $r_1, r_2, \ldots r_n$ sont les n racines complexes de P (pas nécessairement distinctes !)

Exemples :

$$X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$$

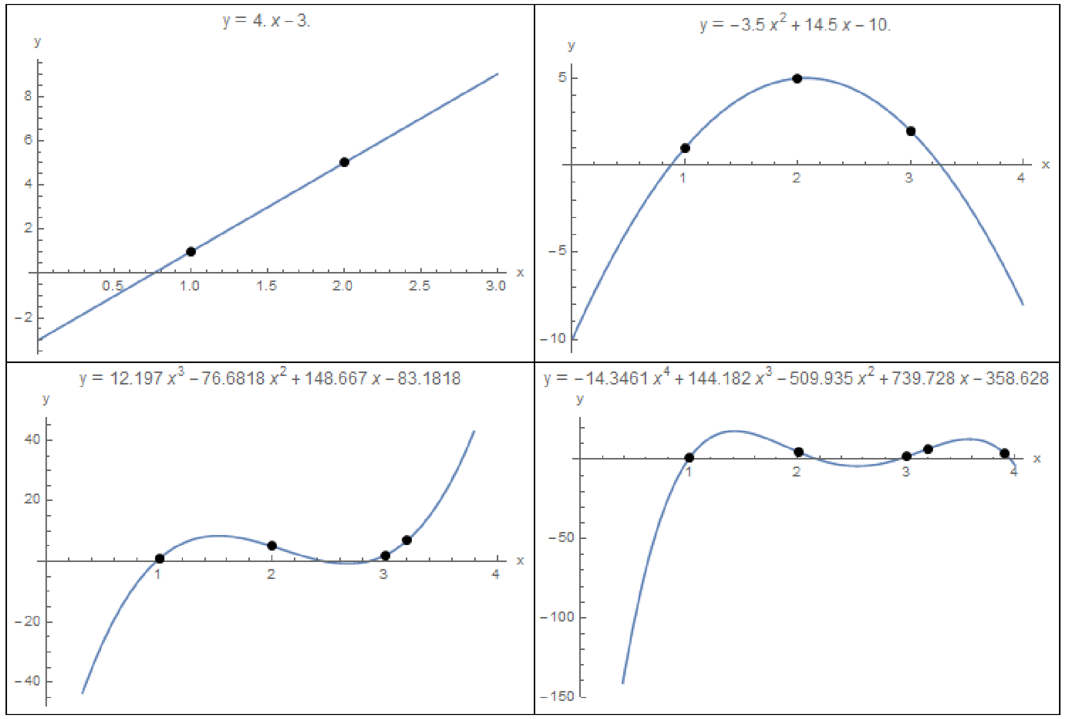
$$X^2 + 1 = (X+i)(X-i) = X^2 + iX - iX - i^2 = X^2 + 1$$

$$X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X+1)(X-1)(X+i)(X-i)$$

Les 4 racines 4ème de 1 sont donc $1, -1, i, -i$

Polynômes d'interpolation

- Le problème d'interpolation polynomiale est le suivant : on connaît un certain nombre de points et les valeurs d'une fonction en ces points. On cherche un polynôme prenant les mêmes valeurs en ces mêmes points.
- A priori, il est possible de déterminer P de façon *unique*, si on impose a P d'être de degré égal au nombre des points moins un.
- *Interprétation géométrique* : on cherche une courbe passant par des points donnés.



Définition (interpolation polynomiale) : Soit $n+1$ points dans le plan : (x_0, y_0), (x_1, y_1), … , (x_n, y_n). On cherche un polynôme P de *degré au plus* n qui passe par ces points, c'est-à-dire :

$$P(x_i) = y_i$$

pour chaque $0 \leq i \leq n$.

Méthode de Lagrange (3 points)

Considérons trois points génériques du plan (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2). Nous définissons trois polynômes $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$ tels que

$$L_0(x_0) = 1 \text{ et } L_0(x_1) = L_0(x_2) = 0$$

$$L_1(x_1) = 1 \text{ et } L_1(x_0) = L_1(x_2) = 0$$

$$L_2(x_2) = 1 \text{ et } L_2(x_0) = L_2(x_1) = 0.$$

L_i prend la valeur

- **1 en x_i**
- **0 en x_j pour $j \neq i$.**

Les polynômes L_0, L_1 et L_2 sont appelés *polynômes de Lagrange* est sont définis par :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad \text{et} \quad L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange (de degré 2) est donné par

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x).$$

Méthode de Lagrange

Exemple :

Calculons le polynôme d'interpolation avec la méthode de Lagrange qui interpole la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

dans les points $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{11}{4}$ et $x_2 = 4$. Nous définissons les trois polynômes de Lagrange

$$L_0(x) = \frac{\left(x - \frac{11}{4}\right)(x-4)}{\left(2 - \frac{11}{4}\right)(2-4)} = \frac{2}{3}\left(x - \frac{11}{4}\right)(x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{\left(\frac{11}{4} - 2\right)\left(\frac{11}{4} - 4\right)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4)$$

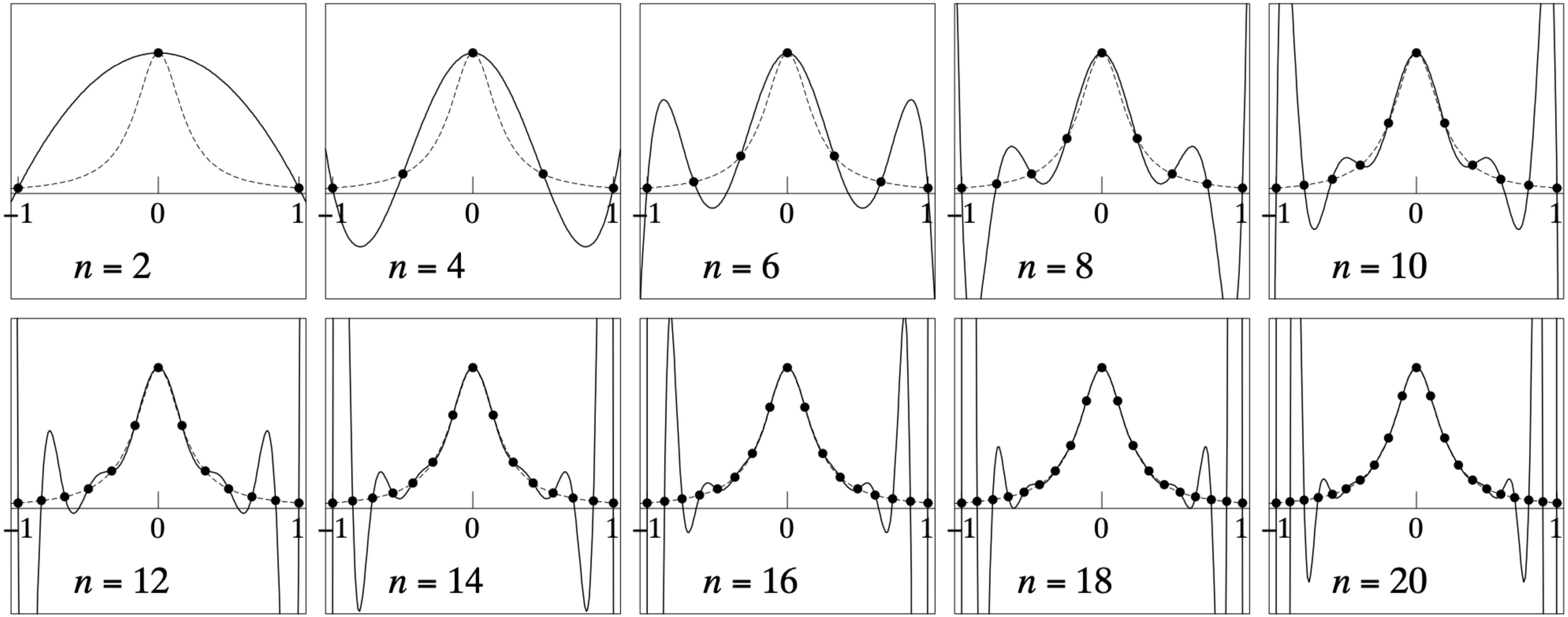
$$L_2(x) = \frac{(x-2)\left(x - \frac{11}{4}\right)}{(4-2)\left(4 - \frac{11}{4}\right)} = \frac{2}{5}(x-2)\left(x - \frac{11}{4}\right)$$

Le polynôme d'interpolation est donnée par

$$P(x) = \frac{1}{2}L_0(x) + \frac{4}{11}L_1(x) + \frac{1}{4}L_2(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$$

Le phénomène de Runge

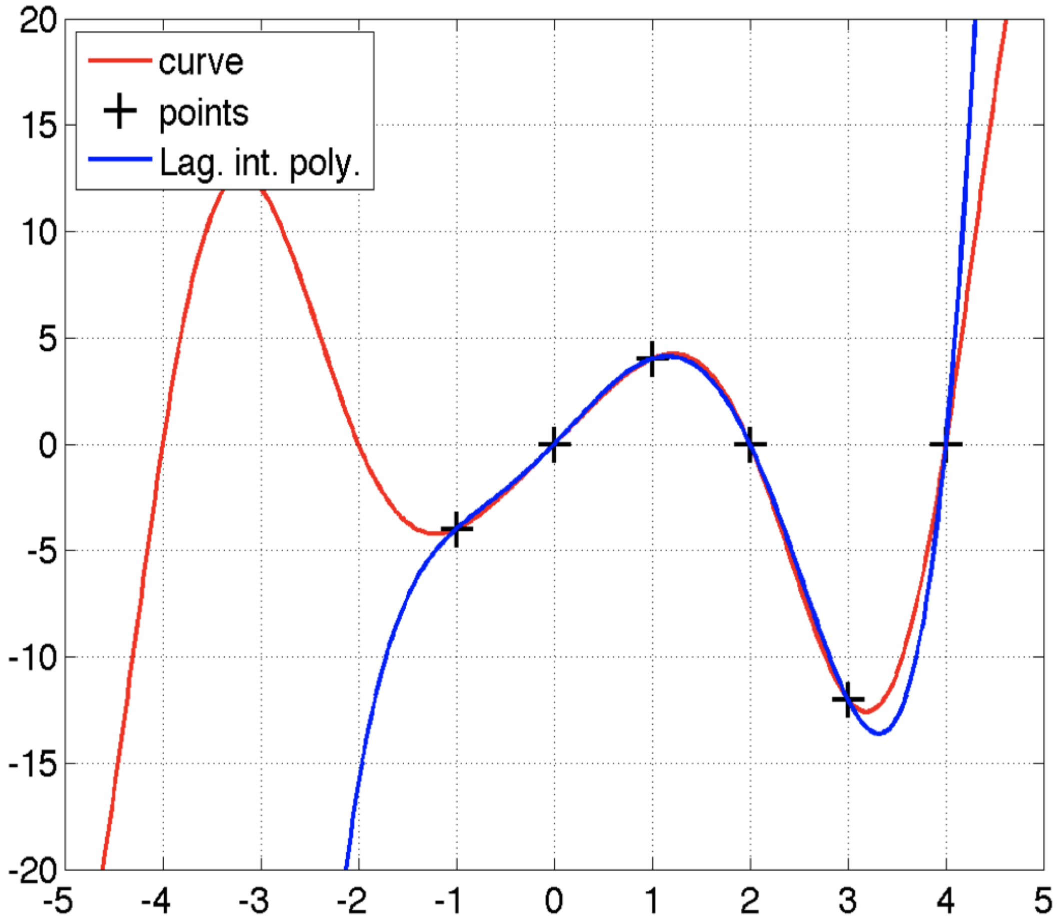
Considérons la **fonction de Runge** : $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ et les polynômes d'interpolation :



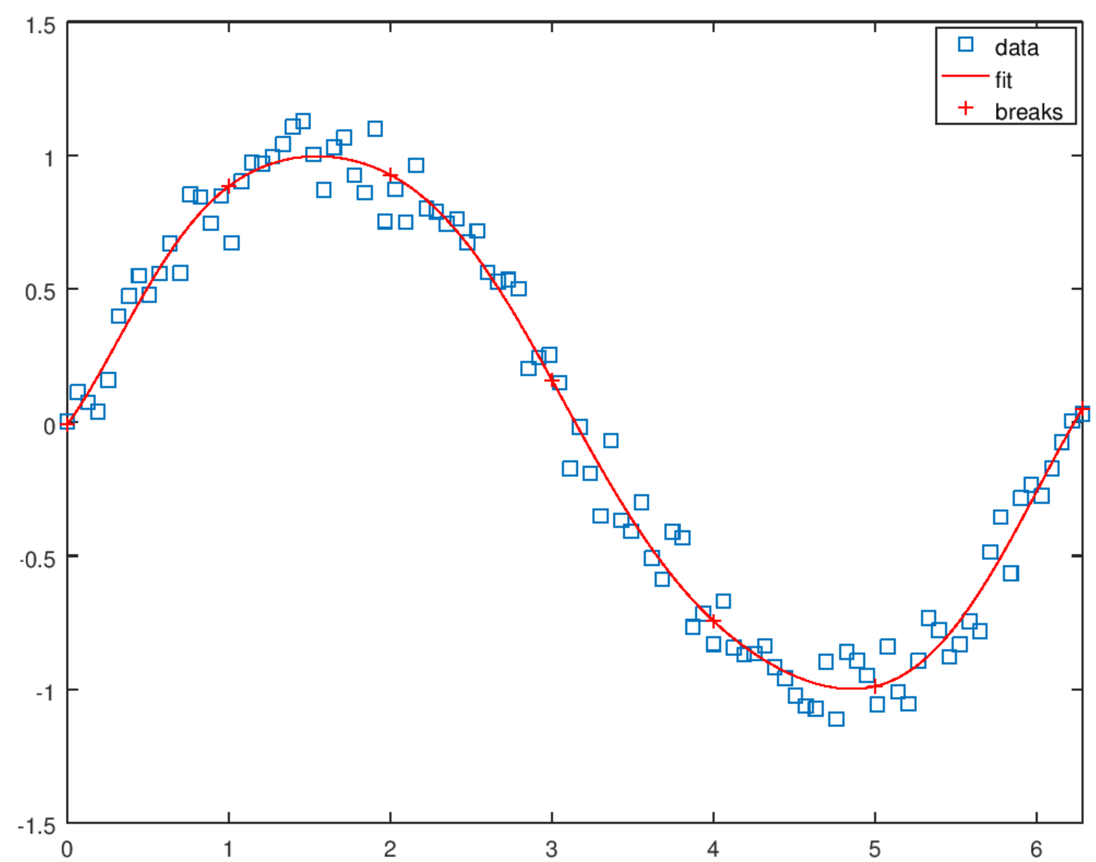
Les polynômes d'interpolation de degré élevé peuvent osciller de manière erratique.
Plus il y a des points, plus l'approximation est mauvaise au bord !

Interpolation vs approximation

Problème 1 : nous souhaitons trouver un type de fonction simple, tel qu'un polynôme, qui peut être utilisé pour déterminer les valeurs approximatives d'une la fonction donnée.



Problème 2 : nous souhaitons trouver la meilleure fonction dans une certaine classe pour représenter les données. La fonction originale qui a produit les données n'est pas connue.



Formule du binôme de Newton

- Dans vos cours de maths, vous avez déjà rencontré les deux formules suivantes (*identités remarquables*) :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- Newton a trouvé une formule plus générale : pour tout $n \in \mathbb{N}$

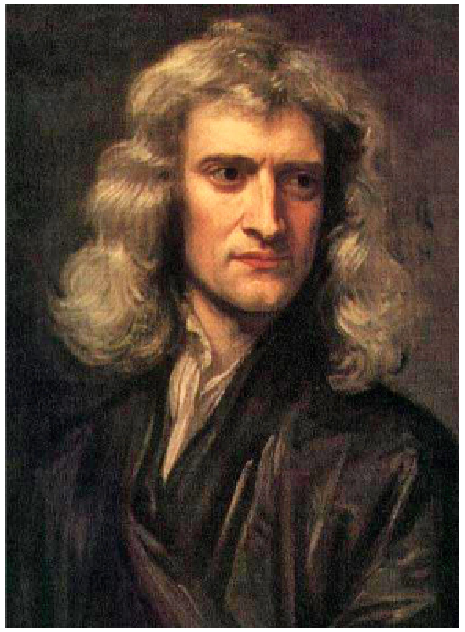
$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^{n-k} b^k$$

où C_k^n sont appelés *coefficients binomiaux* :

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$ est la factorielle de n.



Isaac Newton
1642 - 1726

Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal permet un calcul rapide des coefficients binomiaux dans le développement du binôme de Newton :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & + & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_0^1 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_0^2 & & C_1^2 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_0^3 & & C_1^3 & & C_2^3 & & C_3^3 & & \\
 & C_0^4 & & C_1^4 & + & C_2^4 & & C_3^4 & & C_4^4 & \\
C_0^5 & & C_1^5 & & C_2^5 & & C_3^5 & & C_4^5 & & C_5^5
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= \mathbf{1}\\
(a+b)^1 &= \mathbf{1}a+\mathbf{1}b\\
(a+b)^2 &= \mathbf{1}a^2+\mathbf{2}ab+\mathbf{1}b^2\\
(a+b)^3 &= \mathbf{1}a^3+\mathbf{3}a^2b+\mathbf{3}ab^2+\mathbf{1}b^3\\
(a+b)^4 &= \mathbf{1}a^4+\mathbf{4}a^3b+\mathbf{6}a^2b^2+\mathbf{4}ab^3+\mathbf{1}b^4\\
(a+b)^5 &= \mathbf{1}a^5+\mathbf{5}a^4b+\mathbf{10}a^3b^2+\mathbf{10}a^2b^3+\mathbf{5}ab^4+\mathbf{1}b^5
\end{aligned}$$

Propriétés des coefficients binomiaux

- Comme tout nombre dans le triangle de Pascal est obtenu par la somme des deux nombres du dessus, on peut écrire la formule suivante :

$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$$

- On observe également dans un triangle de Pascal une symétrie des valeurs, ce qui peut se traduire algébriquement par :

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

- De plus, en regardant les nombres sur le bord du triangle, on observe que :

$$C_0^n = C_n^n = 1 \quad \text{et} \quad C_1^n = C_{n-1}^n = n$$

- En posant a=b=1 dans la formule du binôme on obtient

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

coefficients binomiaux et combinatoire

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ peut aussi être interprété comme

- le nombre de parties (ou de sous-ensemble) à k éléments choisis parmi n éléments
- le nombre de listes de longueur *n*, constituées de 1 et de 0, et ayant *k* fois l'élément 1 et *n*–*k* l'élément 0

Exemples:

✓ Dans un jeu de 52 cartes le nombre de mains de 5 cartes est

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5\,!} = 2'598'560$$

✓ Avec 6 étudiants je peux former $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ duos différents