Le Heydar Aliyev Center (Bakou)

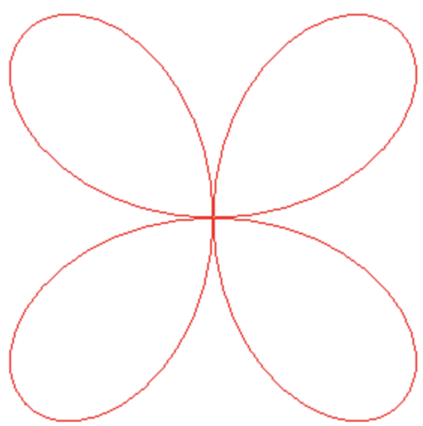
Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Courbes planes

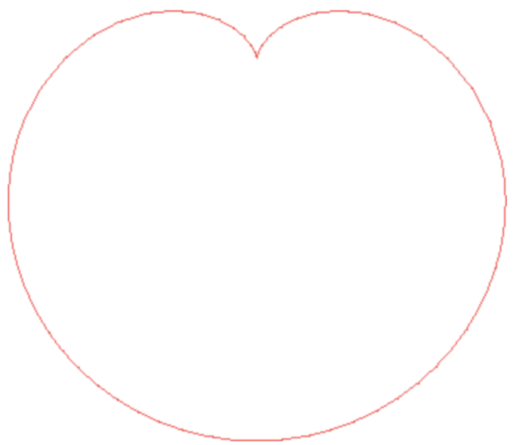
Philippe Chabloz

Exemples dans le plan

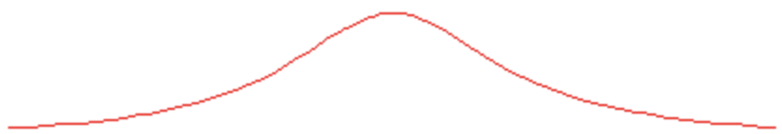
(pour le plaisir des yeux..)



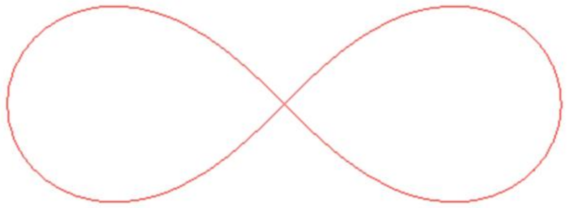
Trèfle à quatre feuilles



Cardioïde



Cubique d'Agnesi



Lemniscate de Bernoulli

Spirale d'Archimède

Parabole semi-cubique

Définition

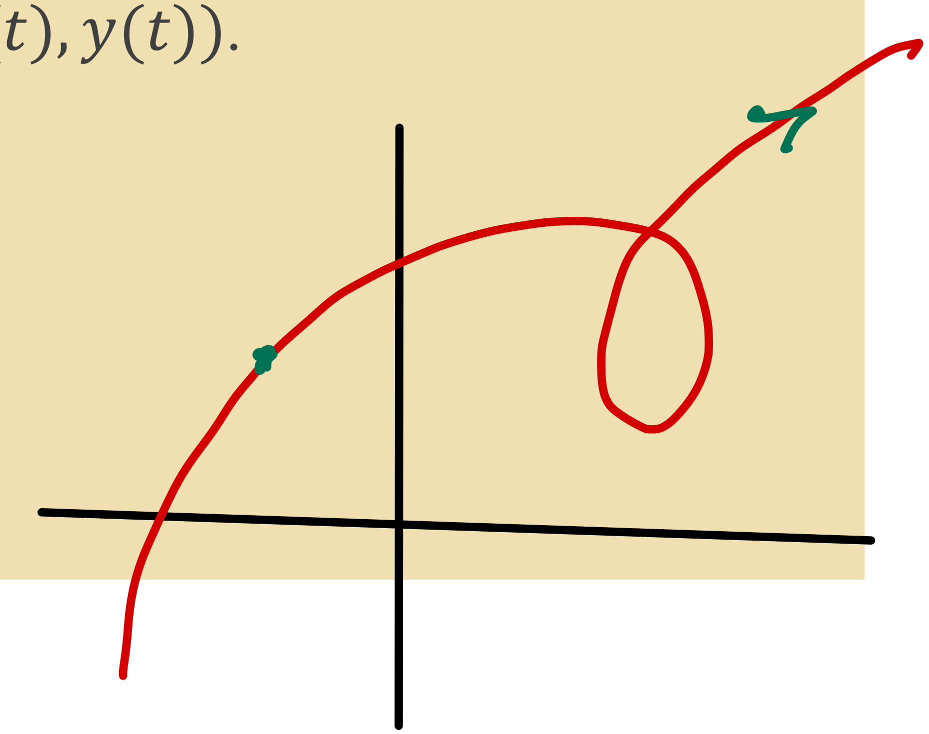
Une **représentation paramétrique d'une courbe** (C) est un système d'équations où les coordonnées des points de la courbe sont exprimées en fonction d'un *paramètre* (souvent noté t, k, θ,...).

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions de la variable réelle $t \in I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. À tout réel t, on associe le point $M(t)$ défini par le vecteur $\overrightarrow{OM} = (x(t), y(t))$.

L'ensemble C des points $M(x, y)$ tels que

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in I,$$



est appelé **courbe paramétrée de paramètre t**.

Remarques :

- Les équations paramétriques d'une courbe ne sont pas uniques !
- Une courbe n'est pas nécessairement le graphe d'une fonction ; c'est pourquoi on parle de courbe paramétrée et non pas de fonction paramétrée.

Droites dans le plan

Soit un point $P(p_x, p_y)$ et un vecteur directeur de la droite $\vec{d} = (d_x, d_y)$. Une **représentation paramétrique de la droite qui passe par P de vecteur directeur $\vec{d}$** est donnée par le système suivant :

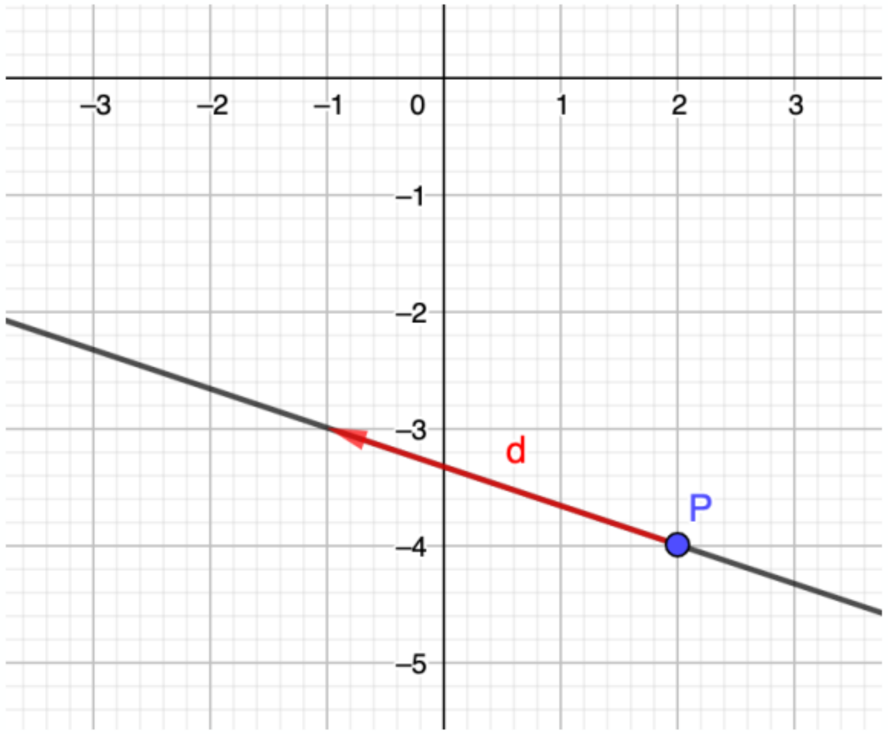
$$\begin{cases} x(t) = p_x + d_x\, t \\ y(t) = p_y + d_y\, t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$

À chaque valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ correspond un point sur la droite.

Par exemple, le système d'équations

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 3t \\ y(t) = -4 + t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

représente une droite qui passe par le point $P(2, -4)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = (-3,1)$.



Paraboles dans le plan

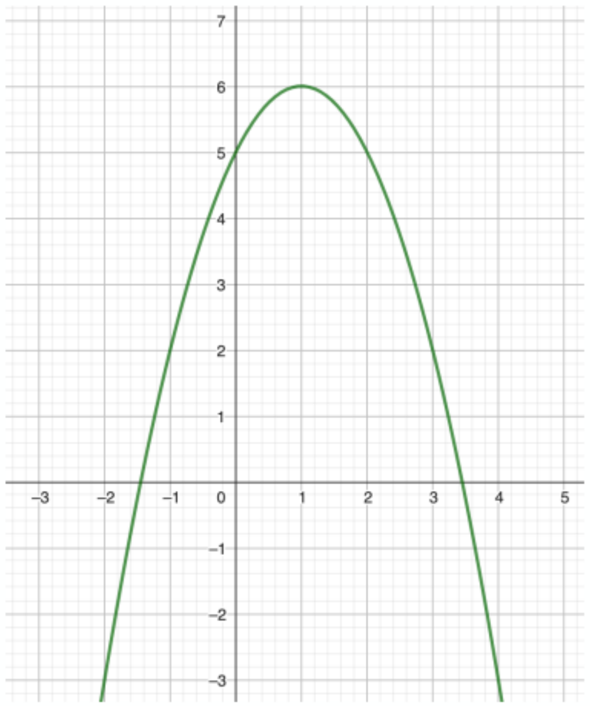
Soient $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ trois constantes réelles. Une **représentation paramétrique d'une parabole** est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = at^2 + bt + c \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$

En général, toute fonction continue f peut être utilisée pour générer une représentation paramétrique d'une courbe en définissant le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}\,.$$

Pour chaque valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ on obtient un point situé sur la courbe.



Cercles dans le plan

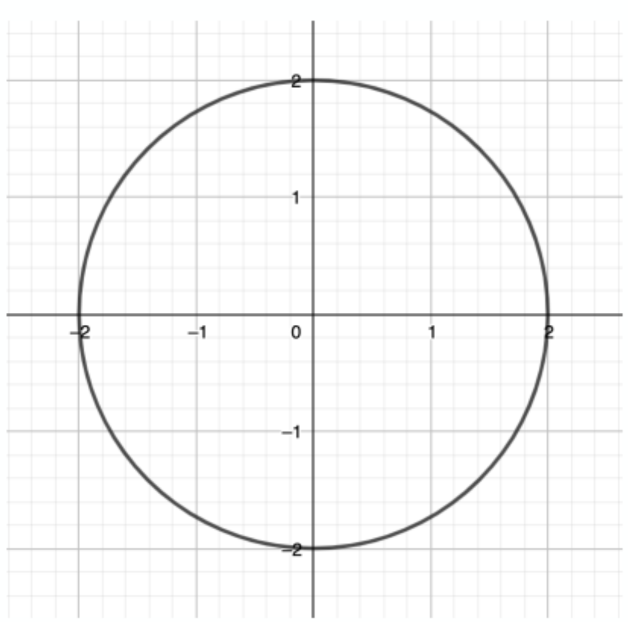
Une **représentation paramétrique d'un cercle centrée dans l'origine et de rayon** $r > 0$ est donnée par le système suivant :

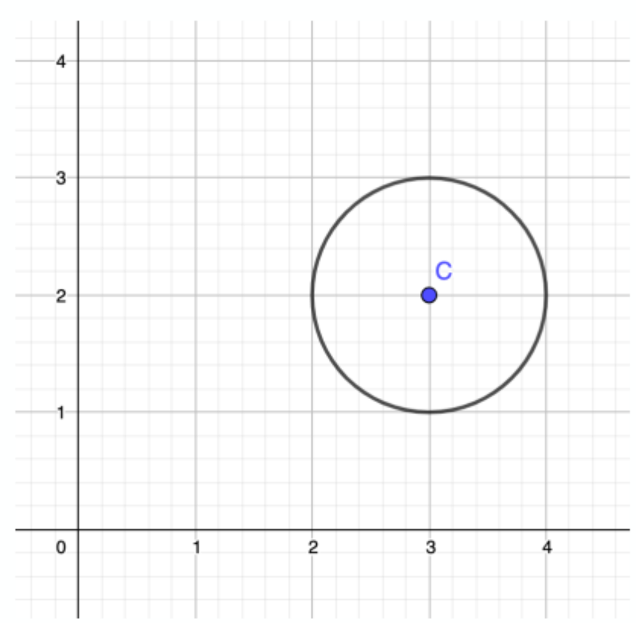
$$\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y(t) = r \cdot \sin(t) \end{cases} \qquad \text{où } t \in [0{,}2\pi[\,.$$

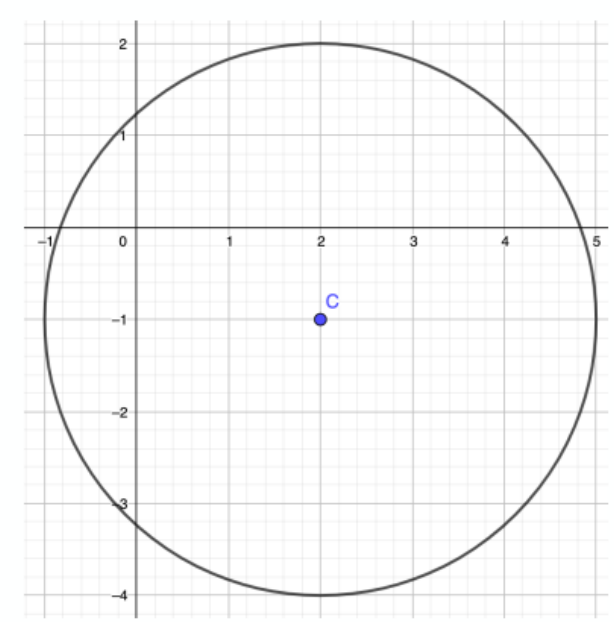
De même, une **représentation paramétrique d'un cercle centrée dans le point** $C(c_x, c_y)$ **et de rayon** $r > 0$ est donnée par le système suivant :

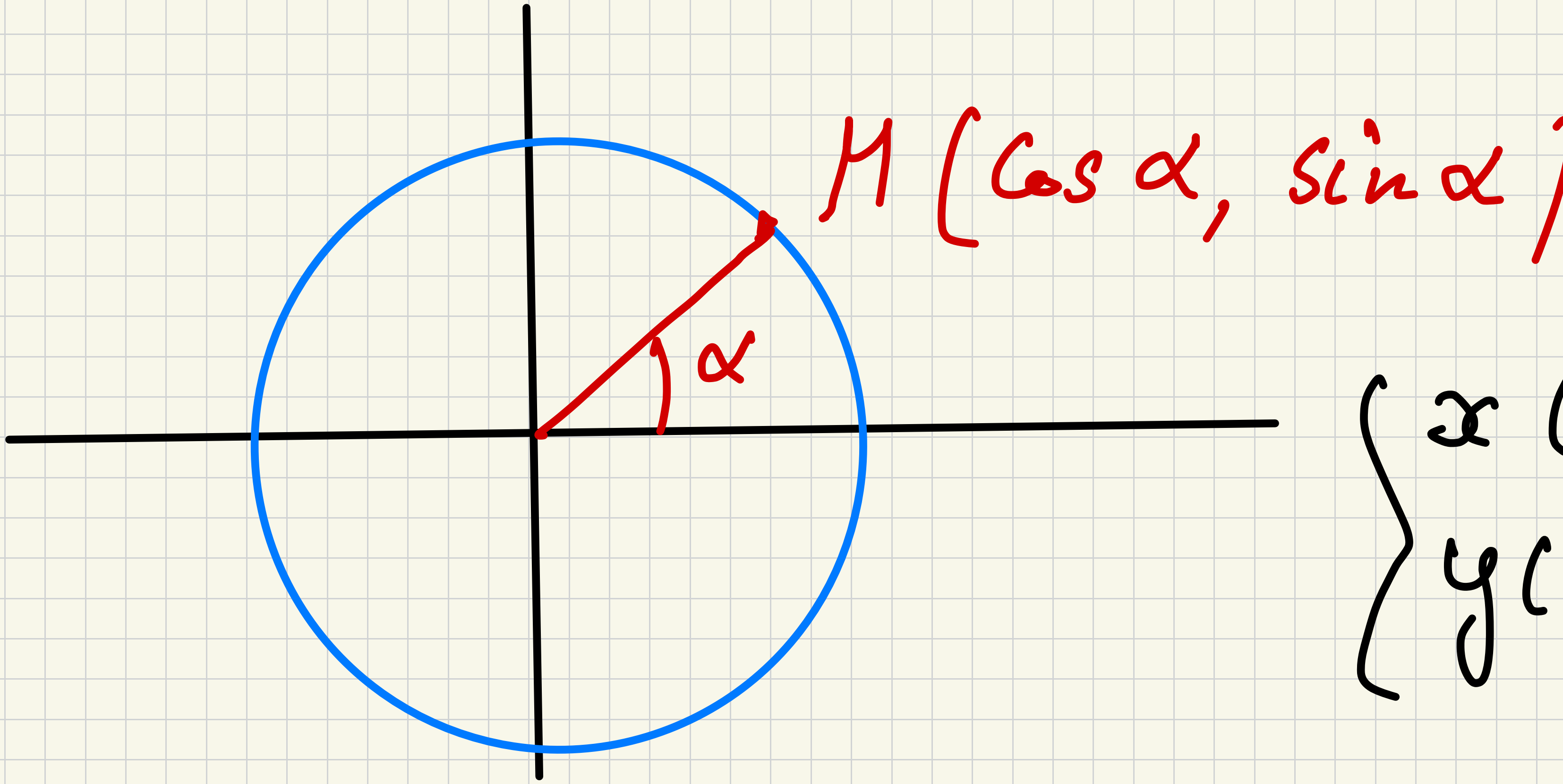
$$\begin{cases} x(t) = c_x + r \cdot \cos(t) \\ y(t) = c_y + r \cdot \sin(t) \end{cases} \qquad \text{où } t \in [0{,}2\pi[\,.$$

Remarque : un cercle n'est pas le graphe d'une fonction !





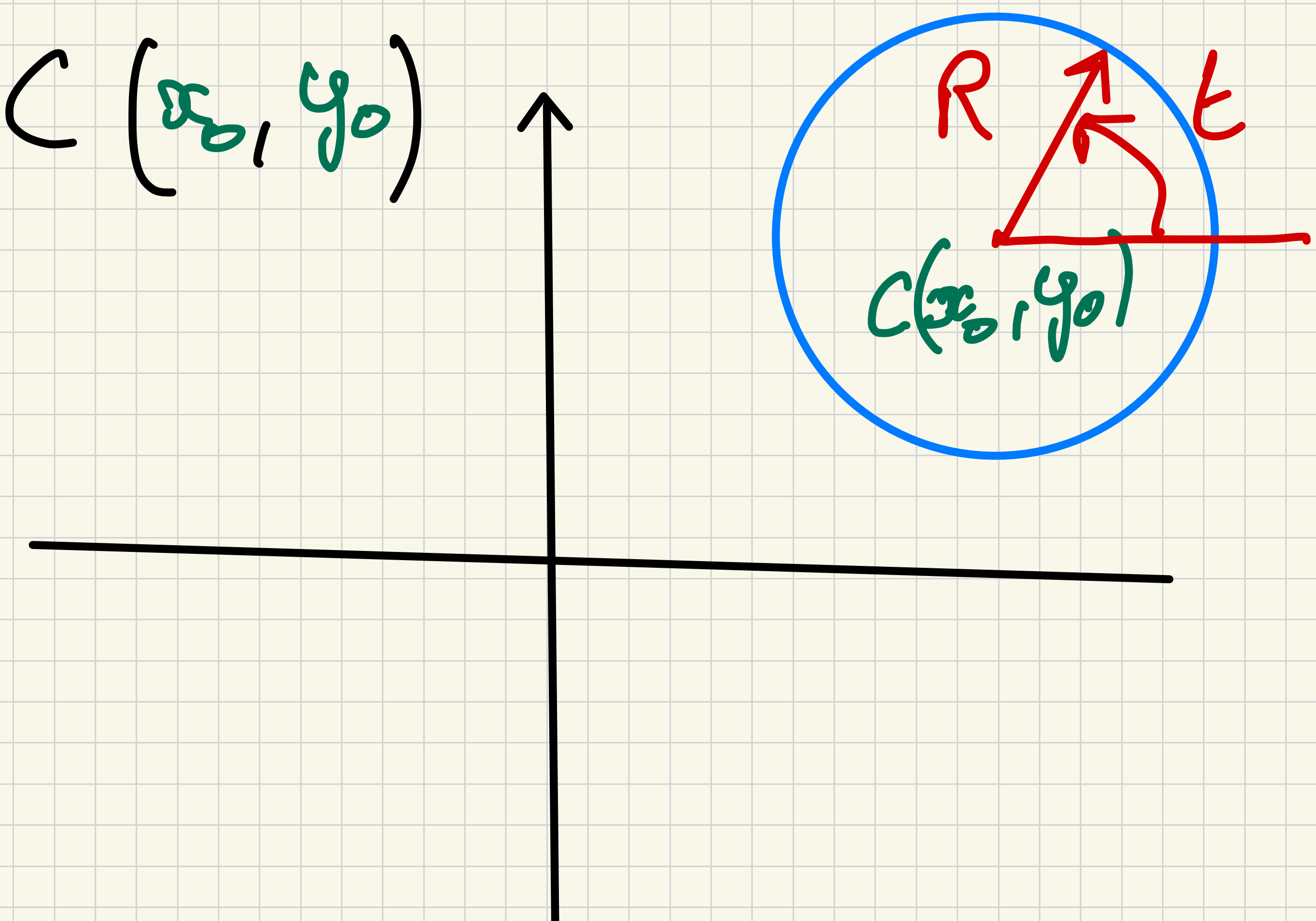




$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{cases}$$

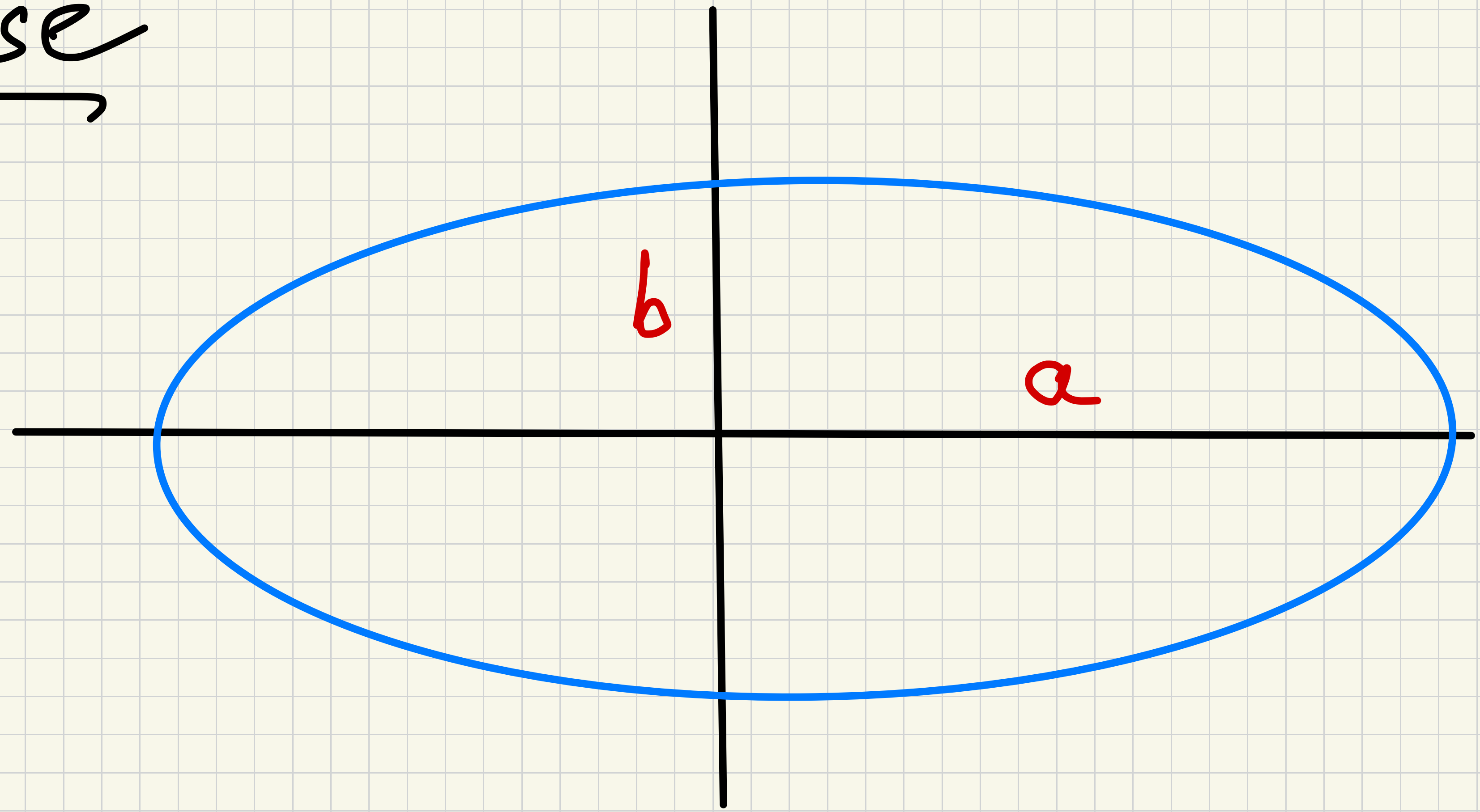
$$t \in [0, 2\pi]$$

$C(x_0, y_0)$



$$c(t) = \begin{pmatrix} R\cos t + x_0 \\ R\sin t + y_0 \end{pmatrix}$$

Ellipse



$$c(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

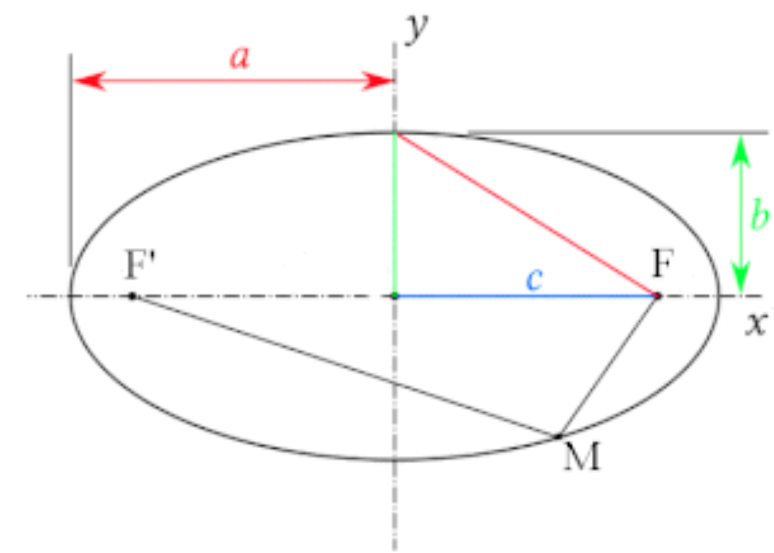
Centre $C(x_0, y_0)$

$$c(t) = \begin{pmatrix} x_0 + \underline{a}\cos t \\ y_0 + \underline{b}\sin t \end{pmatrix}$$

Quelques courbes planes

1. **Ellipse** de centre $C(x_0, y_0)$ et de demi-axes a et b:

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

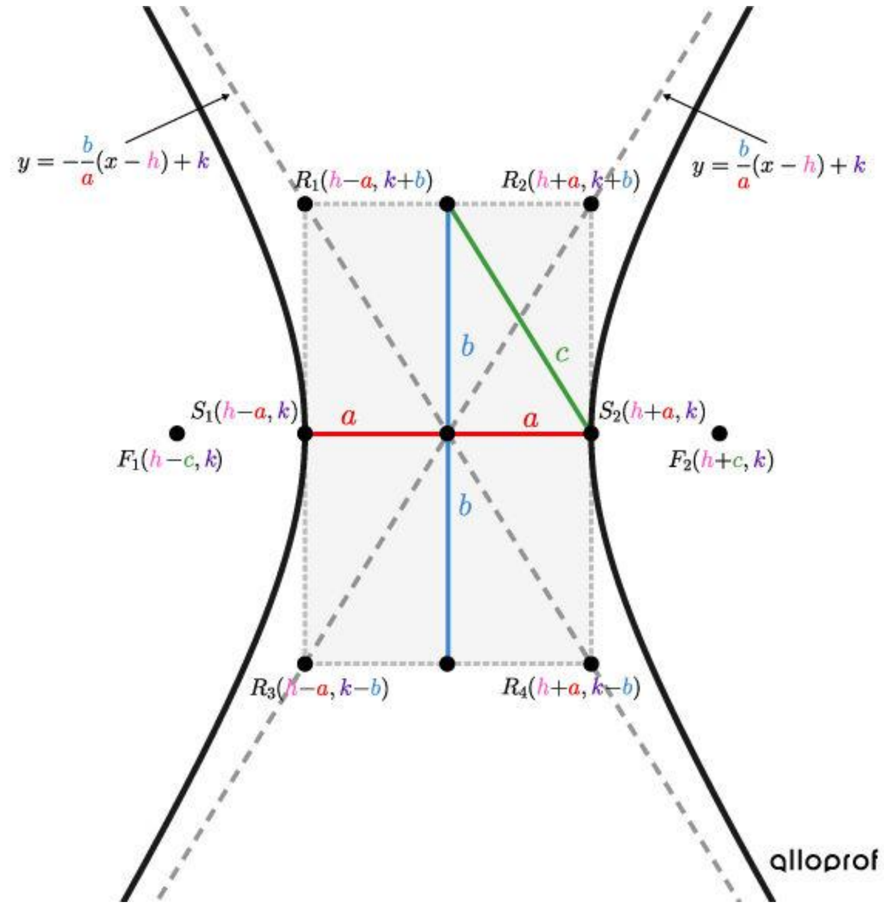


2. **Hyperbole** de centre $C(h, k)$

$\boxed{\text{et d'asymptotes } y = \pm \frac{b}{a} \cdot (x - h) + k}$

$$\left(\frac{x - h}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - k}{b}\right)^2 = 1$$

Sommets :	$S_1(h + a, k)$	et	$S_2(h - a, k)$
Foyers :	$F_1(h + c, k)$	et	$F_2(h - c, k)$
	avec	$c^2 = a^2 + b^2$	



Hyperbole

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \pm a\cosh(t) \\ k + b\sinh(t) \end{pmatrix}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$+$: branche de droite

$-$: " " gauche

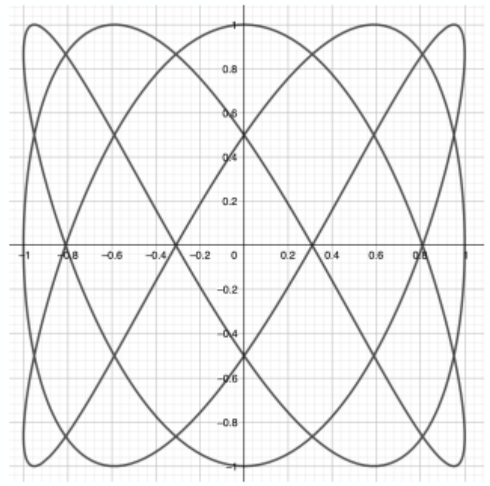
Exemples *exotiques*

Courbes de Lissajous

Les courbes de Lissajous (ou courbes de Bowditch) sont données par la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x(t) = a\sin(\omega_x t + \phi_x) \\ y(t) = b\sin(\omega_y t + \phi_y) \end{cases} \qquad \text{où } t \in [0{,}2\pi[$$

où $a, b, \omega_x, \omega_y > 0$, $n \geq 1$ et $0 \leq \phi_x, \phi_y \leq \pi/2$. En électronique, on peut faire apparaître des figures de Lissajous sur un oscilloscope.



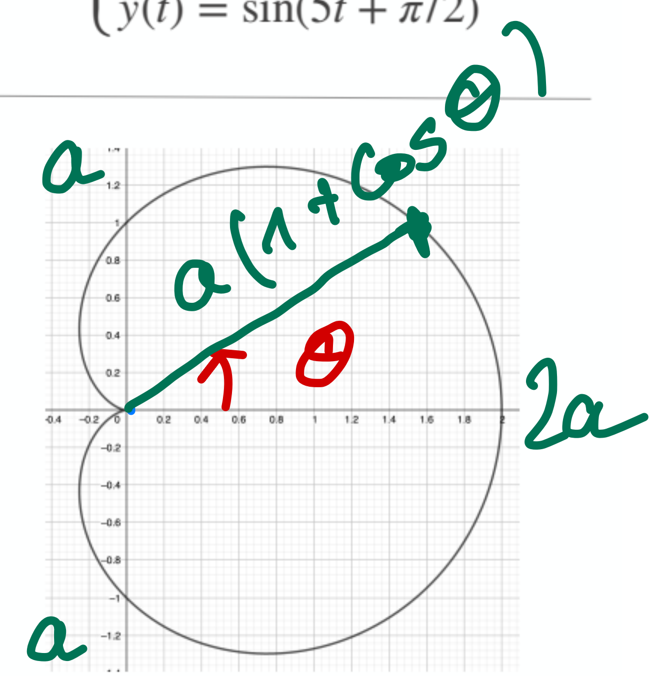
$$\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \sin(5t + \pi/2) \end{cases}$$

Cardioïde

La trajectoire d'un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur un second cercle de même diamètre décrit une courbe appelée cardioïde. Une paramétrisation de la cardioïde est :

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta(1 + \cos\theta) \\ y(\theta) = a\sin\theta(1 + \cos\theta) \end{cases} \qquad \text{où } \theta \in [0{,}2\pi[$$

où $a > 0$.



$$\begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) \\ y(\theta) = \sin(\theta)(1 + \cos(\theta)) \end{cases}$$

Pour de nombreux autres exemples de courbes dans le plan, visitez le site web : https://mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml

Représentation sous forme cartésienne

On peut *parfois*, en éliminant le paramètre entre les deux équations du système qui définit la courbe, obtenir y comme fonction de x, et ramener l'étude de la courbe à celle d'une courbe définie par une fonction $y = f(x)$.

Forme cartésienne explicite :

Nous représentons une courbe plane via l'équation :

$$y = f(x)$$

graphe de f.

c'est-à-dire comme fonction d'une variable indépendante. À chaque valeur x correspond une valeur y, tel que le point (x, y) appartient à la courbe.

Forme cartésienne implicite :

Une courbe peut également être représentée sous la forme :

$$F(x, y) = 0$$

c'est-à-dire comme fonction de deux variables indépendantes.

Exemple :

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Exercice

a. On considère les fonctions suivantes : $x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \cos(2t)$, où $t \in \mathbb{R}$. Exprimer y en fonction de x et en déduire la *nature* de la courbe obtenue.

b. On considère les fonctions suivantes : $x(t) = 2\cosh(t)$ et $y(t) = \sinh(t)$, où $t \in \mathbb{R}$. Exprimer y en fonction de x et en déduire la *nature* de la courbe obtenue.

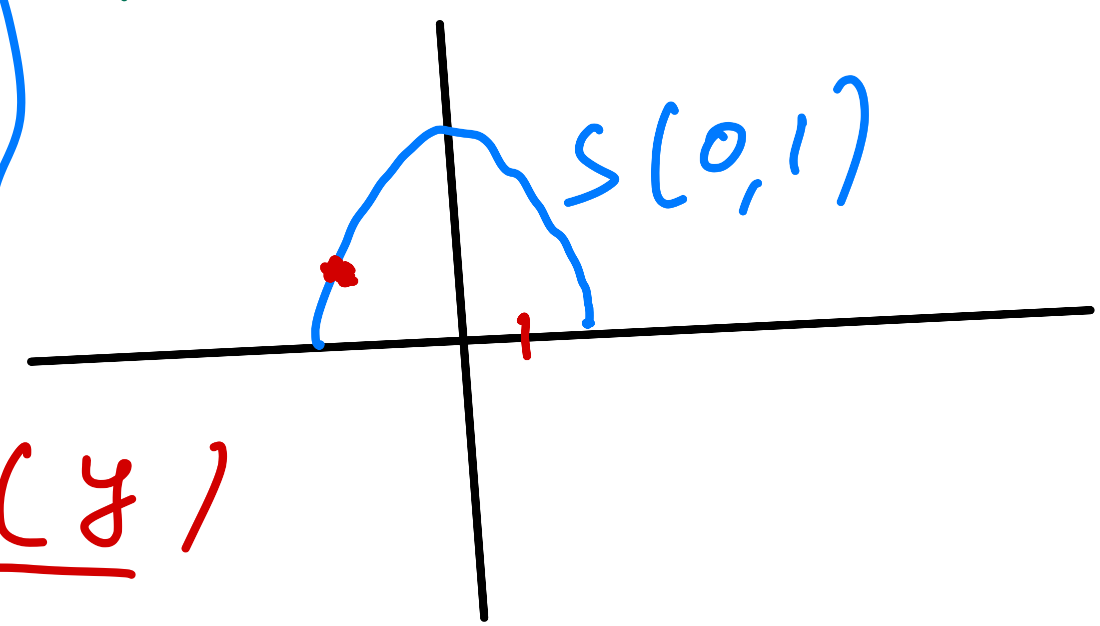
a. $y(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$

$y = \cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$

formule double angle

$= 1 - 2x^2$

$$\boxed{y = 1 - 2x^2}$$



$x = \frac{1}{2}$

$t = \arcsin(x)$

$y = 0{,}8$

$t = \frac{\arccos(y)}{2}$

Exercice

b. $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$

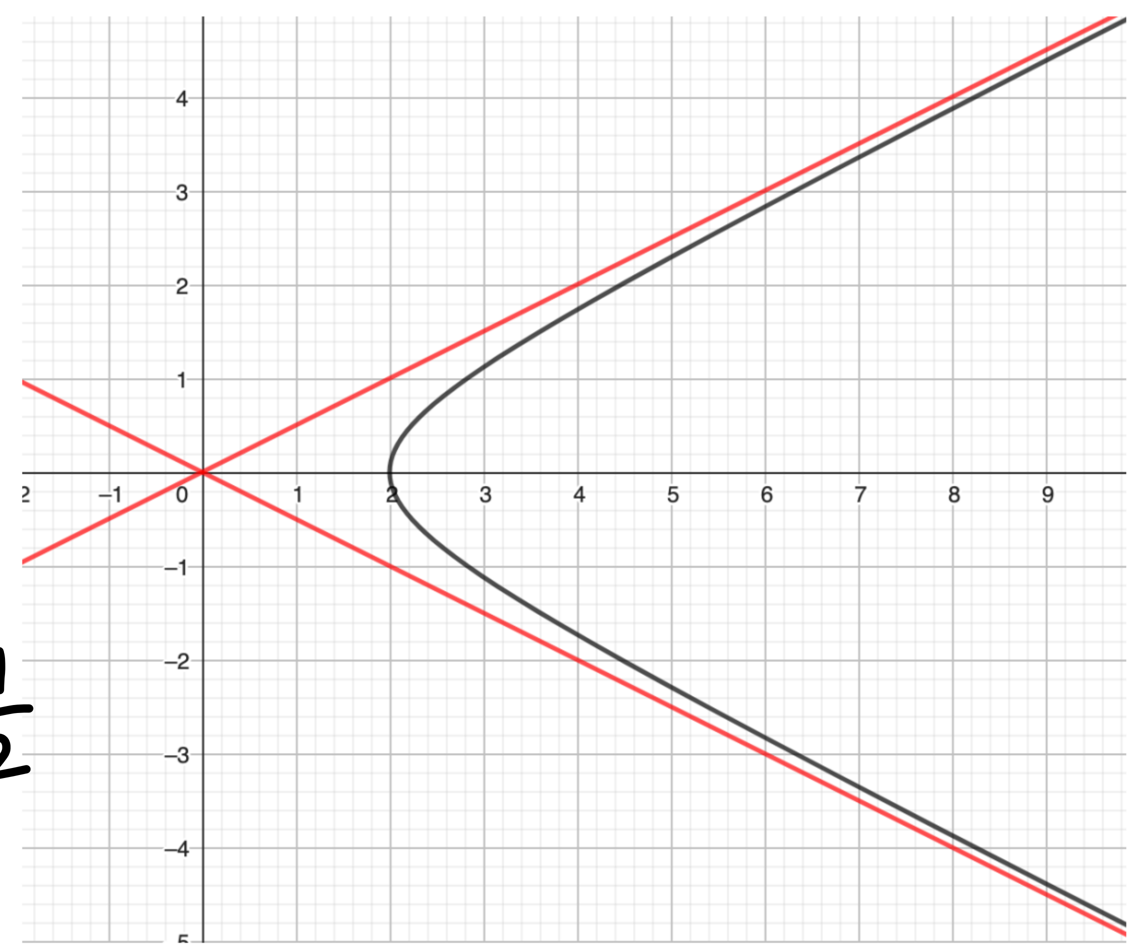
$\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$

$x^2 - 4y^2 = 4\cosh^2(t) - 4\sinh^2(t) = 4$

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - y^2 = 1$$

pente des asymptotes $= \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$



Résumé des trois représentations

$x = \cos t$
$y = \sin t$

- La meilleure représentation est sans aucun doute la **représentation paramétrée**. Cette représentation est également utile pour étudier les problèmes dynamiques puisqu'elle a une notion de vitesse de déplacement le long de la courbe.

cartésienne

- La **représentation en forme implicite** est, selon certains points de vue, meilleure que la représentation explicite. Cependant, on peut rencontrer des problèmes quand il faut expliciter l'une des deux variables en fonction de l'autre : souvent, c'est très compliqué, quand ce n'est pas impossible.

$2x^2 + y^2 = 8$

cartésienne

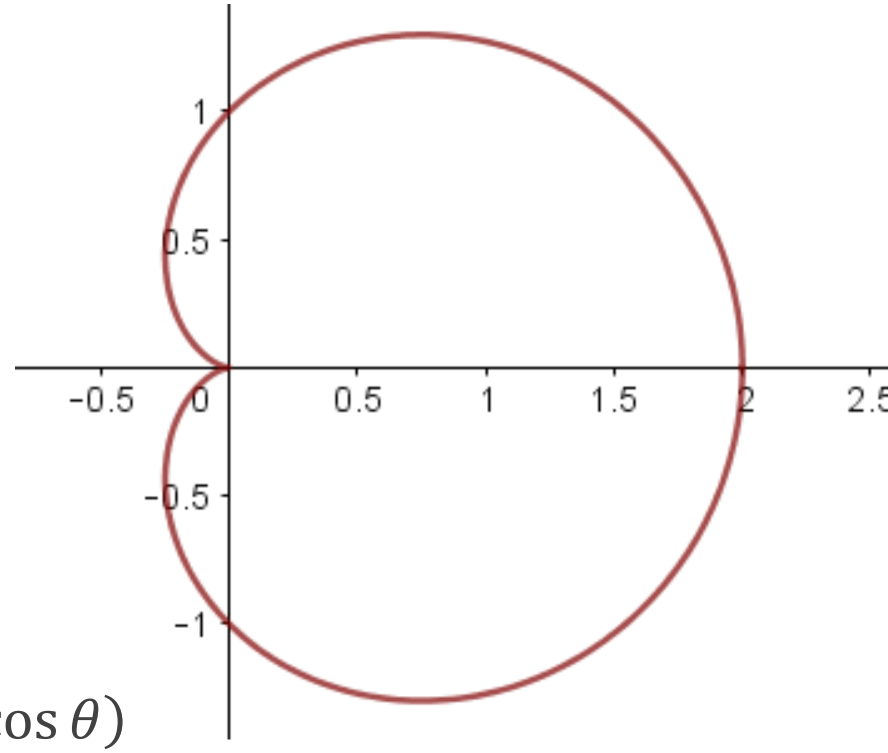
- La **représentation en forme explicite** a de nombreuses limites géométriques, du fait que très souvent, une courbe a une description très complexe sous cette forme, qui n'est donc pas adaptée à l'étude des propriétés géométriques.

Exemple : $y = 2x^2 + e^x$

Cardioïde : forme cartésienne

La cardioïde est donnée sous forme paramétrique par

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot (1+\cos\theta)\cdot\cos\theta \\ x(t) = a \cdot (1+\cos\theta)\cdot\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0{,}2\pi]$$



Pour trouver la forme cartésienne implicite (éliminer θ) on calcule:

$$x^2 = a^2 \cdot (1+\cos\theta)^2 \cdot \cos^2\theta \qquad\qquad y^2 = a^2 \cdot (1+\cos\theta)^2 \cdot \sin^2\theta$$

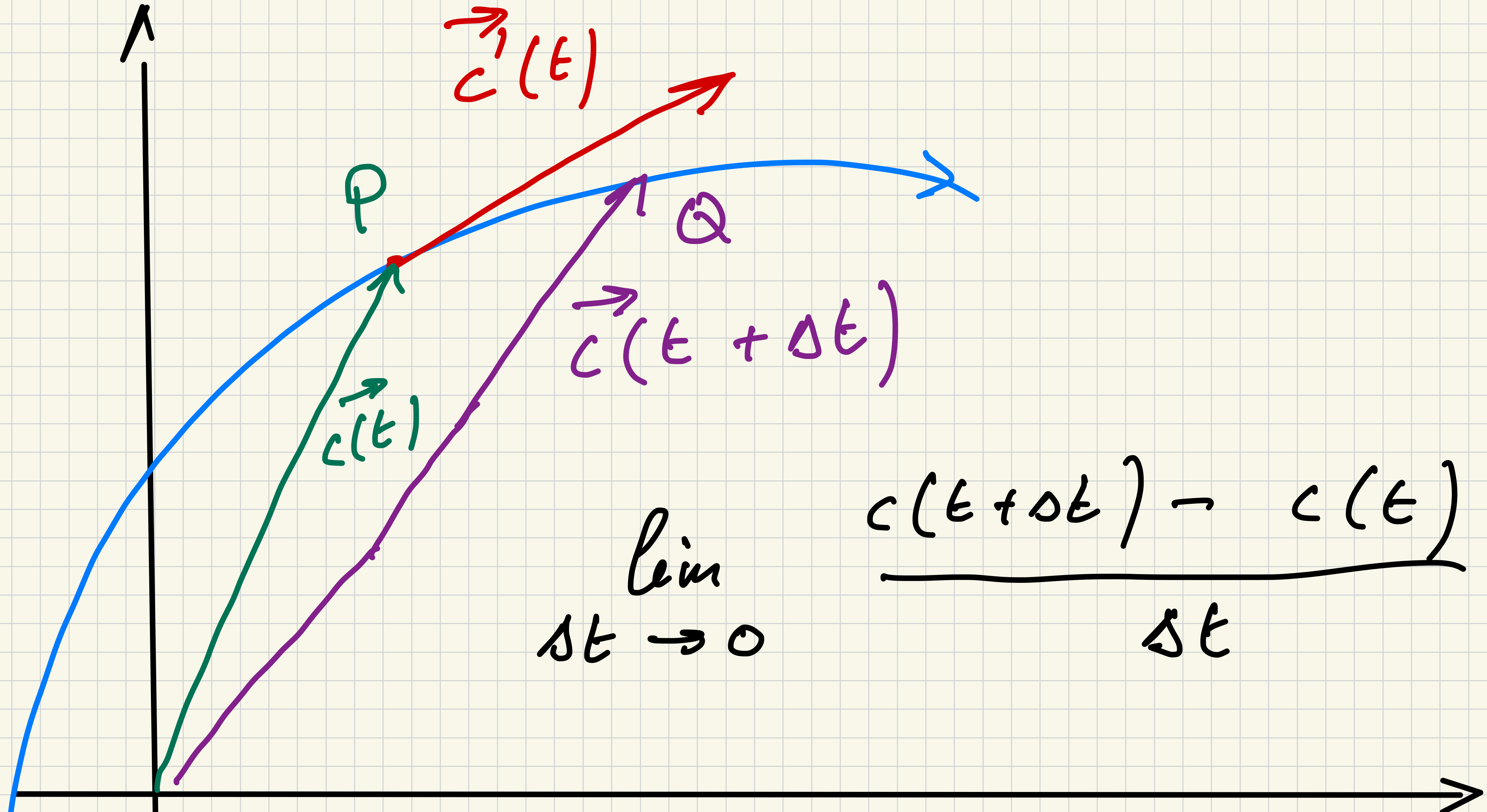
Donc $\quad x^2 + y^2 = a^2 \cdot (1+\cos\theta)^2 \quad$ et alors

$$x^2 + y^2 - ax = a^2 \cdot (1+\cos\theta)^2 - a^2 \cdot (1+\cos\theta)\cdot\cos\theta = a^2 \cdot (1+\cos\theta)$$

ce qui donne $\quad (x^2+y^2-ax)^2 = a^4 \cdot (1+\cos\theta)^2 = a^2 \cdot (x^2+y^2)$

L’équation cartésienne implicite de la cardioïde est donc $\boxed{(x^2+y^2-ax)^2 = a^2 \cdot (x^2+y^2)}$

que l’on peut aussi écrire $\boxed{(x^2+y^2)^2 - 2ax \cdot (x^2+y^2) - a^2\, y^2 = 0}$



$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} = c'(t)$$

Si $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

alors $c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$ vecteur tangent

vecteur vitesse

Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ vecteur tangent est <u>vertical</u>

Si $y'(t_1) = 0$ et $x'(t_1) \neq 0$ $\Rightarrow$ vecteur tangent est horizontale

$$m = \text{pente de } c'(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Vecteur tangent

❖ Soit $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrique :

$$c(t) = (x(t), y(t))$$

où $x: I \to \mathbb{R}$ et $y: I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables.

❖ Le **vecteur tangent à la courbe** en $P = \gamma(t_0)$ est défini comme le vecteur :

$$c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

❖ Le **vecteur normal à la courbe** en $P = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^2$ est défini comme le vecteur :

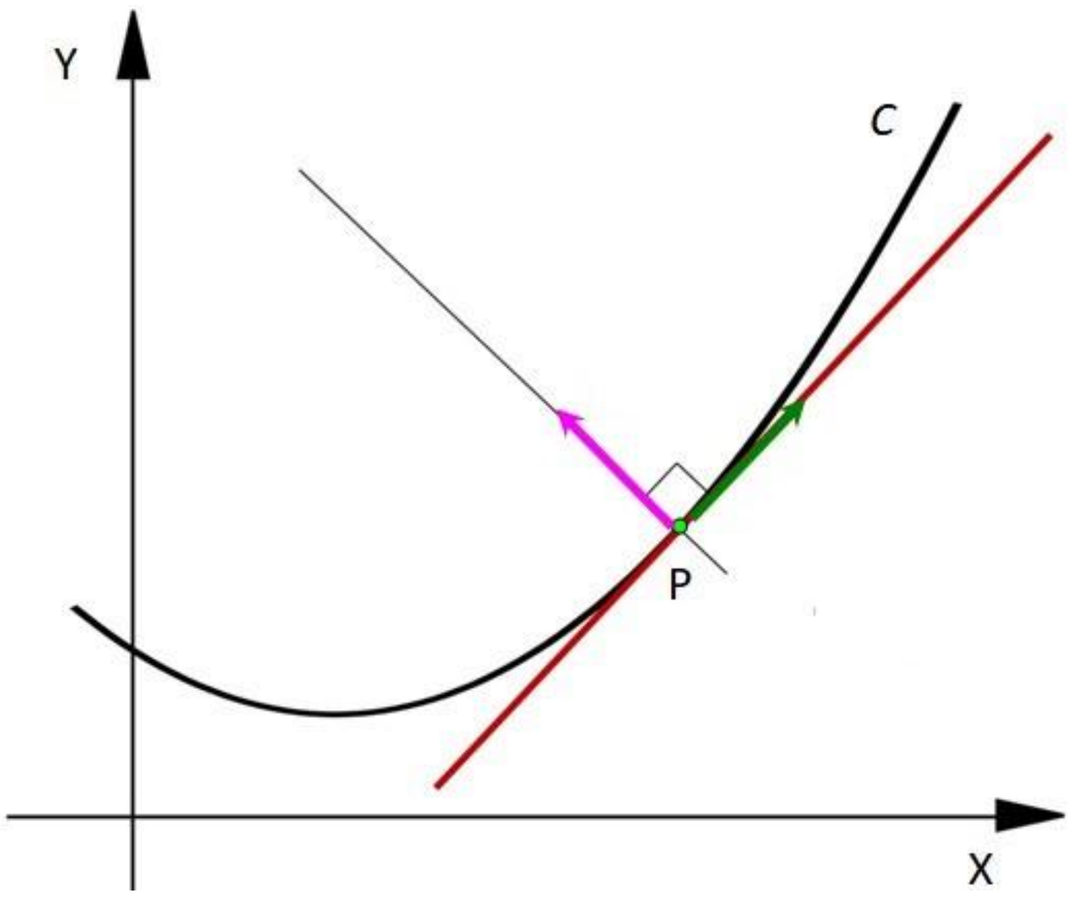
$$n(t_0) = (-y'(t_0), x'(t_0))$$

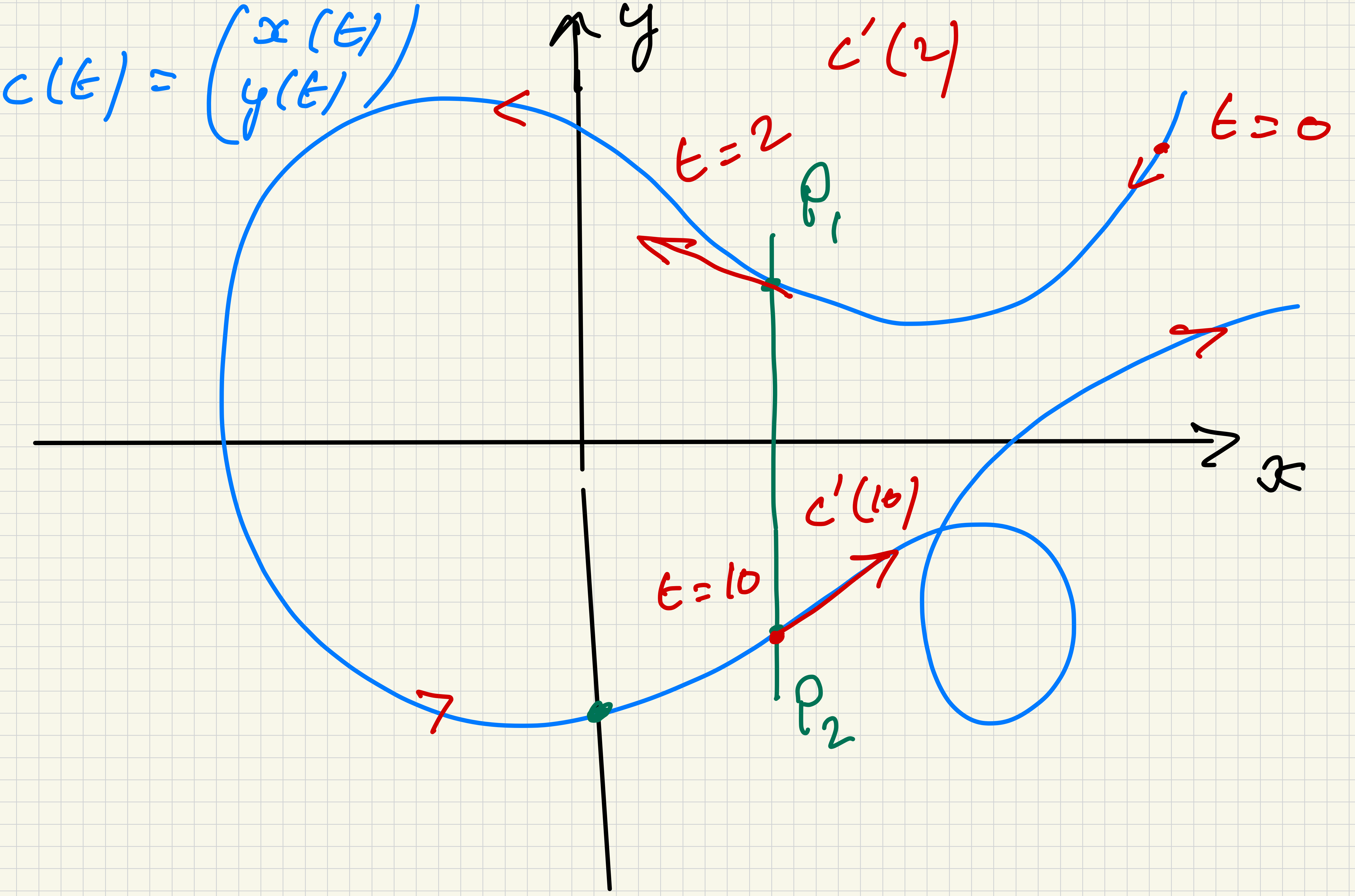
❖ La **pente de la droite tangente** à la courbe en $P = \gamma(t_0)$ est donnée par

$$m(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \qquad \text{si} \quad x'(t_0) \neq 0$$

➢ Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors le vecteur tangent (donc la tangente) est vertical !

➢ Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$ alors le vecteur tangent (donc la tangente) est horizontal !

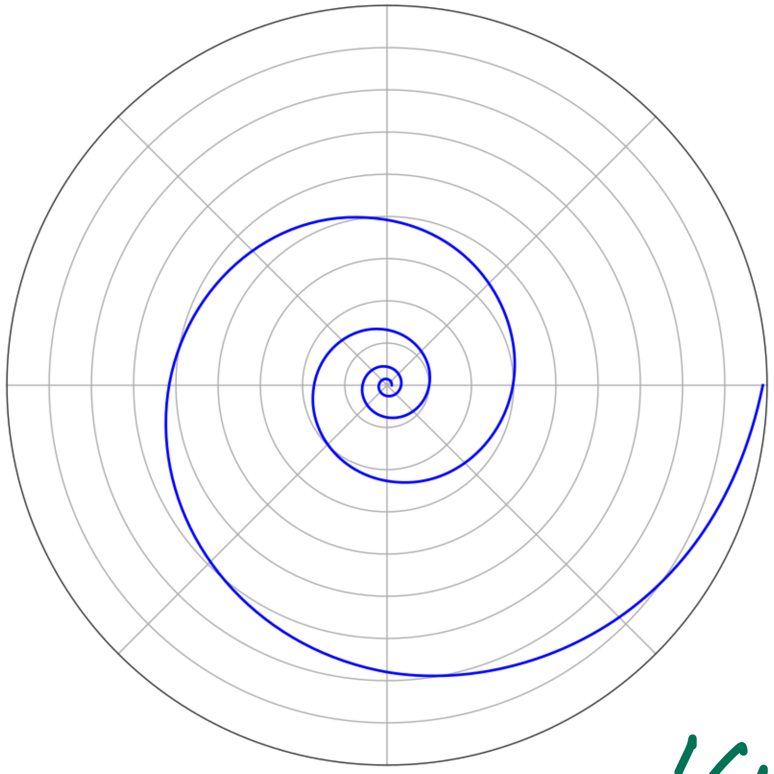



$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
y
$c'(2)$
$t = 0$
$t = 2$
P_1
x
$c'(10)$
$t = 10$
P_2

Spirales logarithmiques

La spirale logarithmique est donnée par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = r\, e^{kt} \cos t \\ y(t) = r\, e^{kt} \sin t \end{cases} \qquad r > 0, \qquad k > 0, \qquad t \in \mathbb{R}$$



Le vecteur tangent est donné par

$$c'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\, e^{kt} \cdot (\mathrm{k} \cos t - \sin t) \\ r\, e^{kt} \cdot (\mathrm{k} \sin t + \cos t) \end{pmatrix}$$

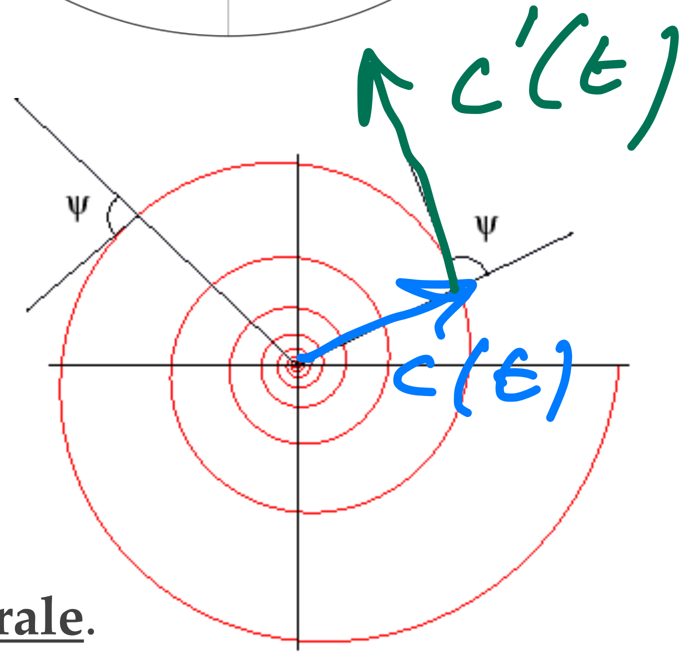
Si on fait le produit scalaire du vecteur position c(t) par le vecteur tangent c'(t) on trouve

$$c(t) \cdot c'(t) = re^{kt} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot re^{kt} \begin{pmatrix} k \cos t - \sin t \\ \mathrm{k} \sin t + \cos t \end{pmatrix} =$$

$$= r^2 \cdot e^{2kt} \cdot (k \cos^2 t - \cos t \sin t + \sin t \cos t + \mathrm{k} \sin^2 t) = k\, r^2 \cdot e^{2kt}$$

L'angle entre le vecteur tangent $c'(t)$ et le vecteur position c(t) vérifie donc

$$\cos \Psi = \frac{k\, r^2 \cdot e^{2kt}}{\|c(t) \cdot\| \cdot \|c'(t)\|} = \frac{k\, r^2 \cdot e^{2kt}}{re^{kt} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot\, r\, e^{kt}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \qquad \to \qquad \tan \Psi = \frac{1}{k}$$



<u>L'angle *Ψ* est indépendant de *t*</u> et est donc le **<u>même pour tous les points de la spirale</u>**.
Ces spirales sont appelées des **spirales équiangles.**

Exemple

Courbe : $c(t) = (t^2, t^3)$

$$c'(t) = (2t\ ,\ 3t^2)$$

$$c'(0) = (0 \quad 0) \qquad c(0) = (0,0)$$

$$x(t) = t^2$$

$$y(t) = t^3$$

$$x^3 = (t^2)^3 = t^6$$

$$y^2 = (t^3)^2 = t^6 \qquad x \geq 0$$

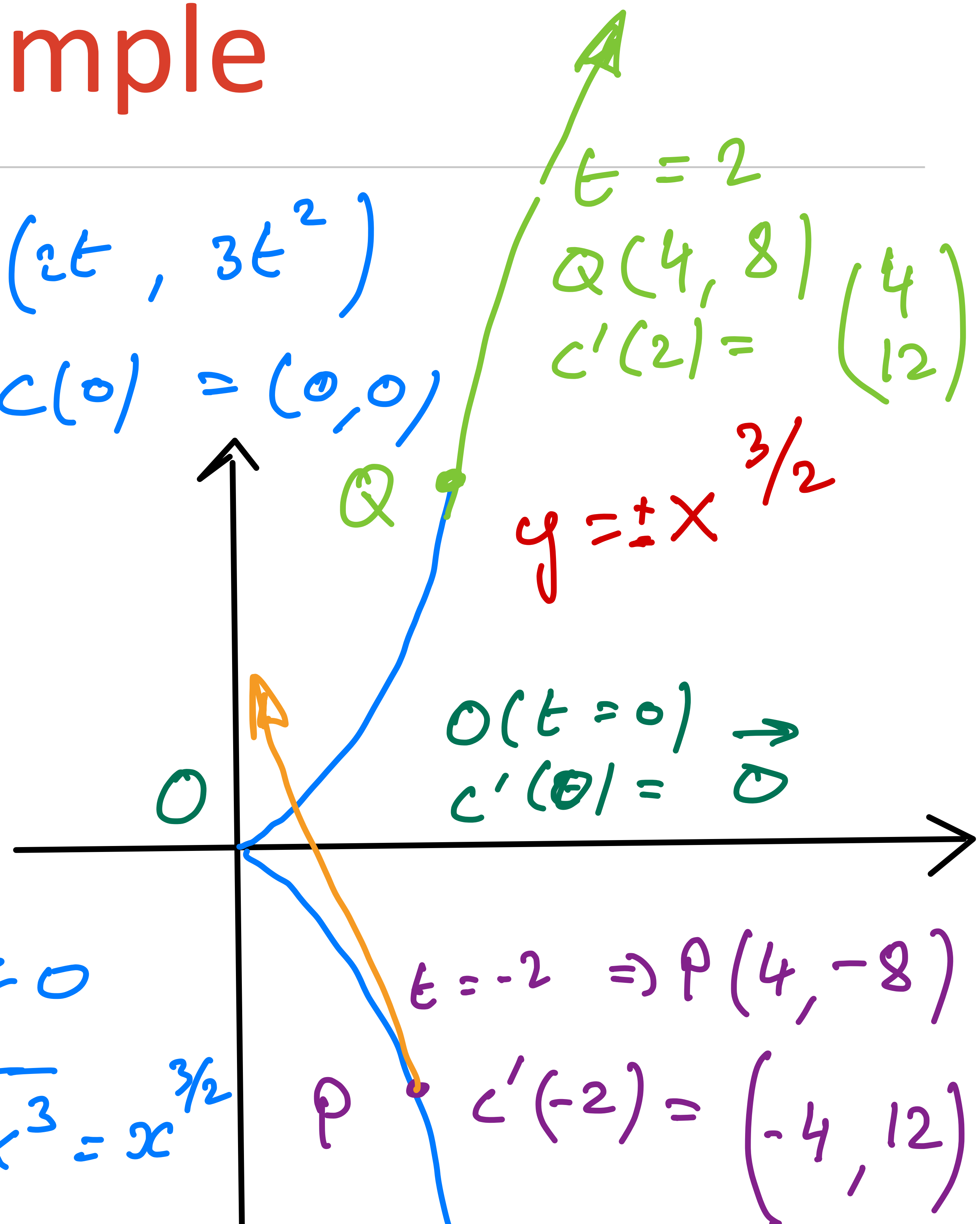
$$\boxed{y^2 = x^3} \qquad y = \pm\sqrt{x^3} = x^{3/2}$$

$t = 2$

$Q(4, 8)$

$c'(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$

$y = \pm x^{3/2}$



$O(t=0) \rightarrow$

$c'(0) = \vec{0}$

$t = -2 \Rightarrow P(4, -8)$

$c'(-2) = (-4, 12)$

Exercice

Trouver l'équation de la tangente à la courbe (γ): $x^3y^2 + y^3 + x^2 - 4x - 5y + 1 = 0$ au point $P(1,2)$.

$$x^3 y(x)^2 + y(x)^3 + x^2 - 4x - 5y(x) + 1 = 0 \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$\underline{3x^2 y(x)^2} + \underline{x^3 \cdot 2y(x) \cdot y'} + \underline{3y(x)^2 \cdot y'} + \underline{2x - 4} - \underline{5y'} = 0$$

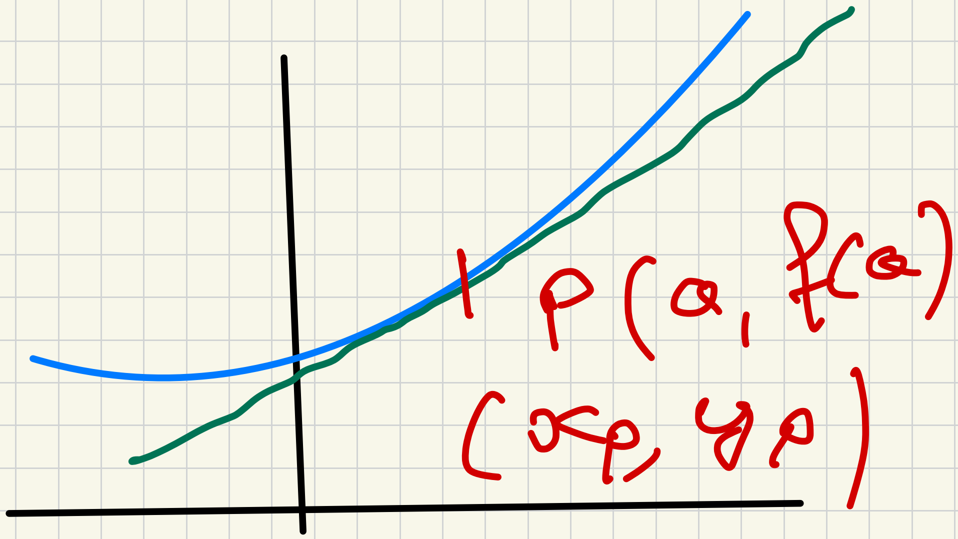
$$y'(2x^3y + y^2 - 5) = 4 - 2x - 3x^2y^2$$

$$\boxed{y' = \frac{4 - 2x - 3x^2y^2}{2x^3y + y^2 - 5}}$$

$$P(1,2) \Rightarrow y'_P = \frac{4 - 2 - 12}{4 + 12 - 5} = -\frac{10}{11}$$

Tangente à y en P :

$$y = -\frac{10}{11}(x-1)+2$$



Tangente :

$$y = f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$$

$$y = \underset{\substack{\| \\ m_P}}{y'_P}\,(x-x_P)+y_P$$

Différentiation d'une équation implicite

Soit γ une courbe donnée sous forme cartésienne implicite

$$(c) : F(x, y) = 0$$

Pour calculer la pente de la tangente à c, on considère y comme une fonction de variable x, c'est-à-dire $y = y(x)$, et on dérive l'équation implicite $F(x, y) = 0$ **par rapport à x**.

La dérivée de y devient alors y'. En isolant y' on obtient une formule qui donne y' en fonction des deux coordonnées x et y:

$$y' = y'(x, y)$$

Un vecteur tangent en un point $P(x_P, y_P)$ de la courbe est alors $c'(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_P, y_P) \end{pmatrix}$ $\parallel \quad m = y'_P$

Exemple

Considérons la courbe d'équation cartésienne implicite $\qquad x^2 - 2y^3 = 4$

En considérant y comme fonction de x, $y = y(x)$ et en dérivant l'équation de la courbe par rapport à x on obtient

$$2x - 6y^2 \cdot y' = 0$$

En isolant y' ceci donne

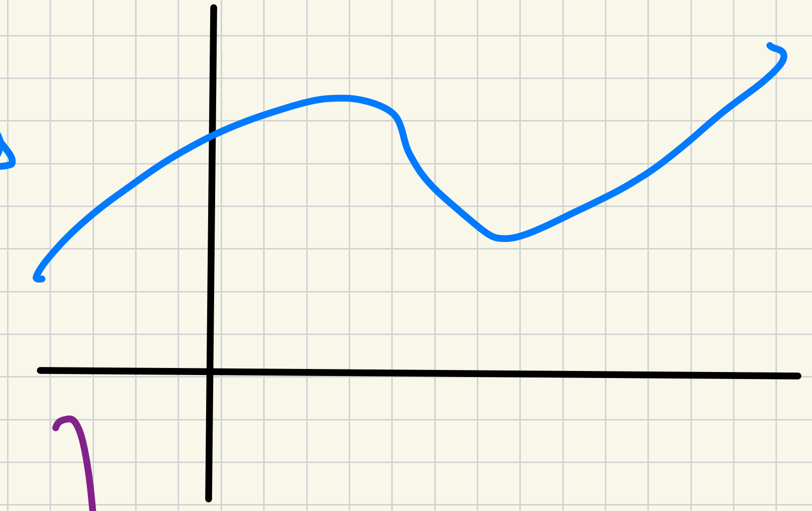
$$\boldsymbol{y' = \frac{2x}{6y^2} = \frac{x}{3y^2}}$$

Aux points $P_1(-2,0)$ et $P_2(2,0)$, les tangentes sont verticales. Au point $Q\left(0, \sqrt[3]{2}\right)$, la tangente est horizontale.

Au point $S\left(\sqrt{2}, -1\right)$, la pente de la tangente vaut $m_S = \frac{\sqrt{2}}{3\cdot(-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Cartésienne explicite → paramétrique

$y = f(x)$ graphe de f



On choisit $x = t$!!

$$\Rightarrow \quad c(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

vecteur tangent

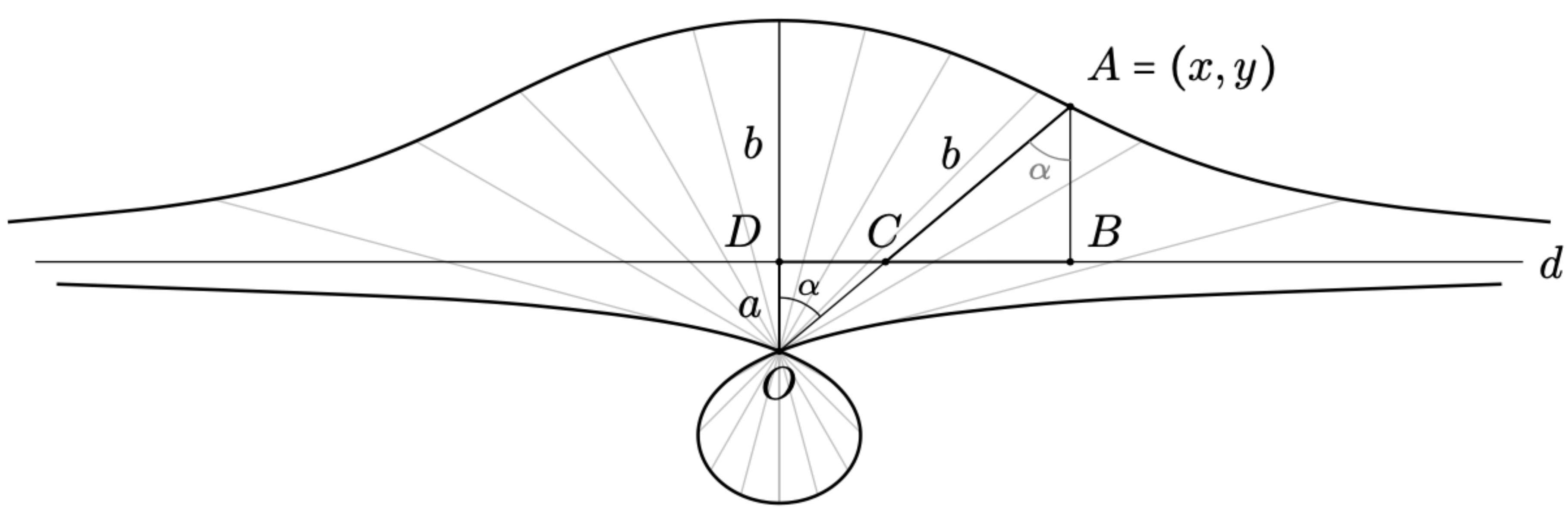
Résumé : vecteur tangent

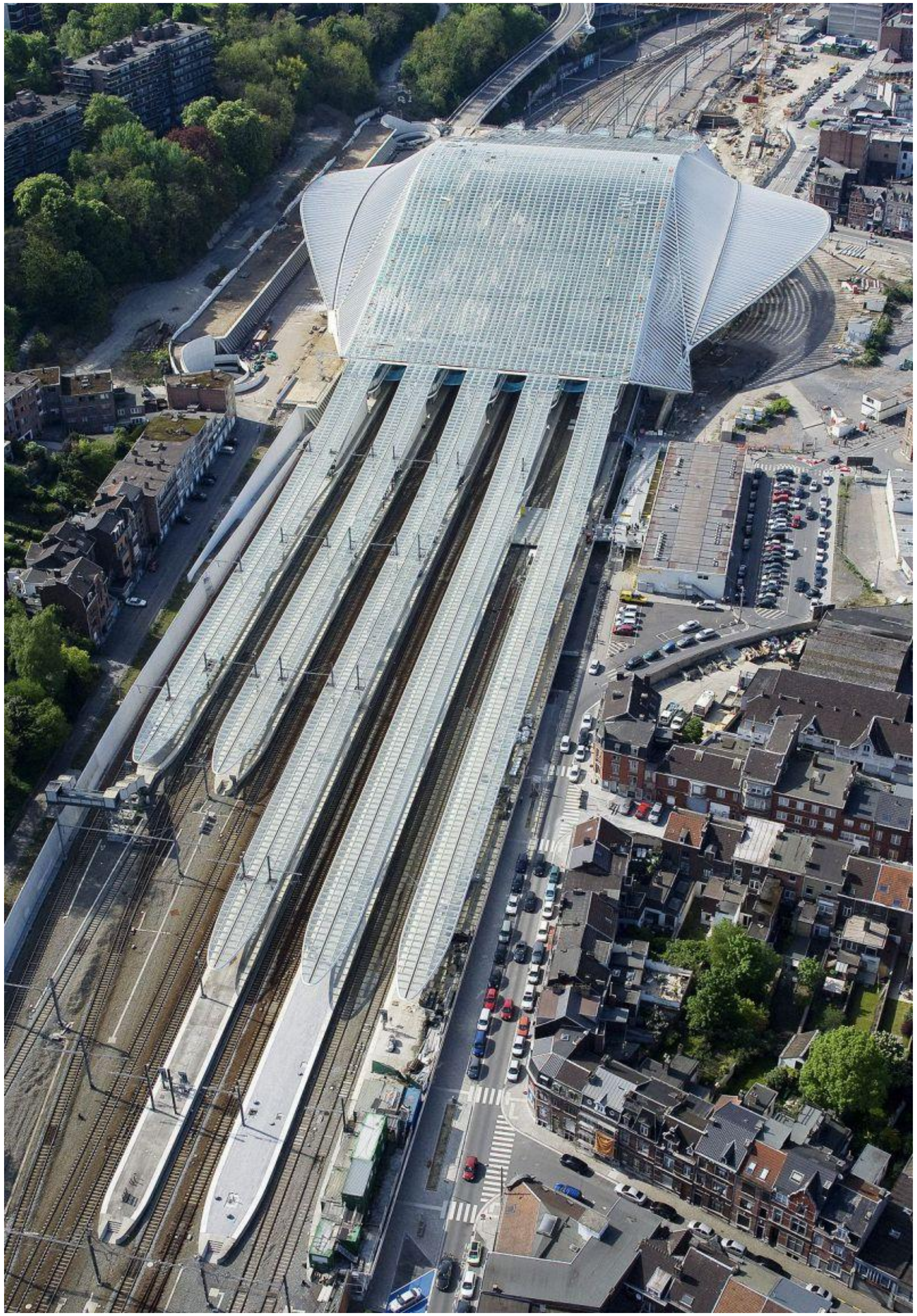
Forme	Equation de la courbe	Vecteur tangent en P
paramétrique	$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$	$c'\big\|_P = c'(t_P) = \begin{pmatrix} x'(t_P) \\ y'(t_P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix}$
Cartésienne explicite	$y = f(x)$	$c'\big\|_P = c'(x_P) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_P) \end{pmatrix}$
Cartésienne implicite	$F(x,y) = 0$	$c'\big\|_P = c'(x_P, y_P) = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x_P, y_P) \end{pmatrix}$

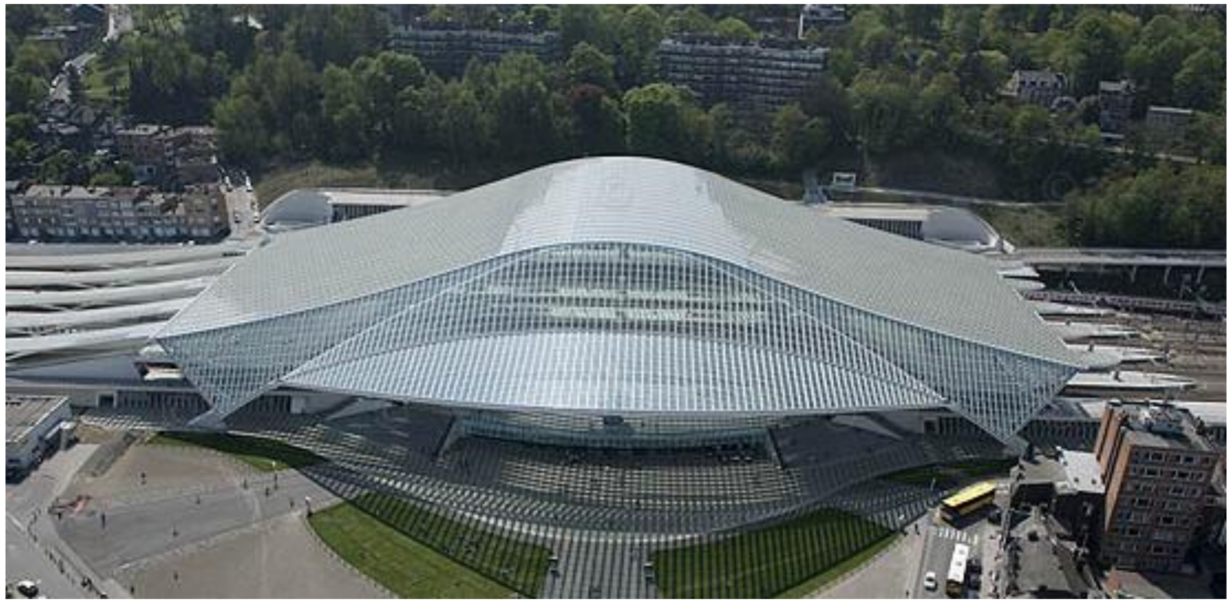
$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$ pente de $\vec{v} = \dfrac{b}{a}$

Conchoïde de Nicomède

- Donnés deux nombres $a, b > 0$ on considère un point O qui, pour simplifier l'exposé, sera considéré comme coïncidant avec l'origine.
- Soit d une droite horizontale à une distance a de O et s une demi-droite issue de O qui forme un angle de α avec la verticale.
- Soit C le point d'intersection de la demi-droite s avec la droite d.
- Depuis C on mesure une distance de b le long de la demi-droite s pour obtenir un point A.
- Le lieu des points A déterminé en faisant varier l'angle α est la conchoïde de Nicomède.
- Lorsque l'angle $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$ la distance b sur la demi-droite s est prise dans la direction de O.







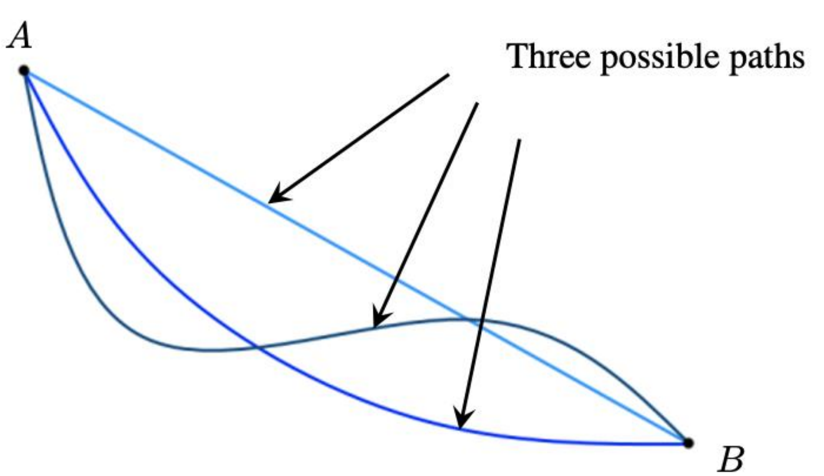
Gare de Liège-Guillemins

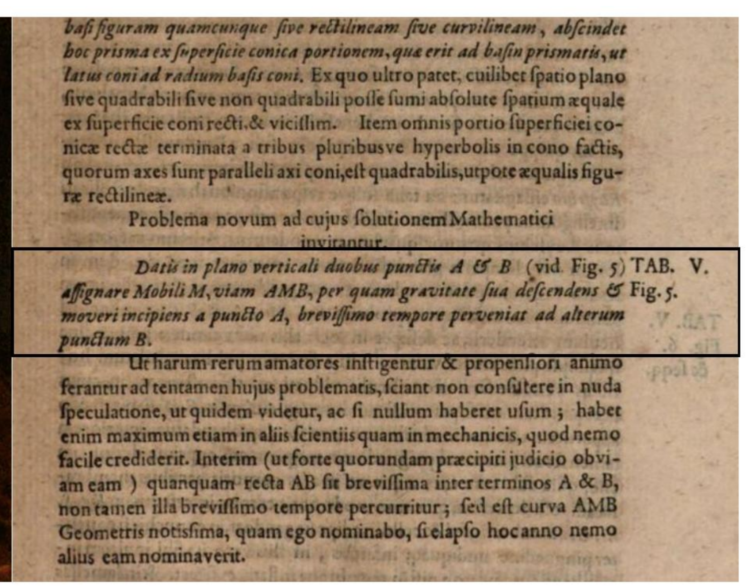
œuvre de l'architecte espagnol Santiago Calatrava

La brachistochrone

En juin 1696, le célèbre mathématicien *Johann Bernoulli* a publié dans les *Acta Eruditorum*, le premier périodique scientifique allemand, le problème suivant :

Étant donné deux points A et B dans un plan vertical, quelle est la courbe tracée par un point soumis à la seule gravité, qui part de A et atteint B dans le temps le plus court.





basi figuram quamcunque sive rectilineam sive curvilineam, abscindet hoc prisma ex superficie conica portionem, quæ erit ad basin prismatis, ut latus coni ad radium basis coni. Ex quo ultro patet, cuilibet spatio plano sive quadrabili sive non quadrabili posse sumi absolute spatium æquale ex superficie coni recti, & vicissim. Item omnis portio superficiei conicæ rectæ terminata a tribus pluribusve hyperbolis in cono factis, quorum axes sunt paralleli axi coni, est quadrabilis, utpote æqualis figuræ rectilineæ.

Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid. Fig. 5) *assignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate sua descendens & moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.* TAB. V. Fig. 5.

Ut harum rerum amatores instigentur & propensiori animo ferantur ad tentamen hujus problematis, sciant non consistere in nuda speculatione, ut quidem videtur, ac si nullum haberet usum; habet enim maximum etiam in aliis scientiis quam in mechanicis, quod nemo facile crediderit. Interim (ut forte quorundam præcipiti judicio obviam eam) quanquam recta AB sit brevissima inter terminos A & B, non tamen illa brevissimo tempore percurritur; sed est curva AMB Geometris notissima, quam ego nominabo, si elapso hoc anno nemo alius eam nominaverit.

- Ce défi mathématique est connu sous le nom de problème de la brachistochrone. Même si *Johann Bernoulli* savait déjà comment le résoudre lui-même, il a lancé un défi aux autres mathématiciens d'Europe et leur a accordé six mois pour le résoudre.
- Après ce délai, aucune réponse n'a été donnée. Même *Gottfried Leibniz* a demandé une prolongation du délai. L'après-midi du 29.1.1697, *Isaac Newton* a trouvé le défi dans son courrier. Il l'a ensuite résolu pendant la nuit et a envoyé la solution de manière anonyme.
- Les équations paramétriques de la brachistochrone pour $A(0,0)$ et $B(\pi,-2)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta - \sin(\theta) \\ y(\theta) = -1 + \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{où} \quad \theta \in [0,\pi]$$

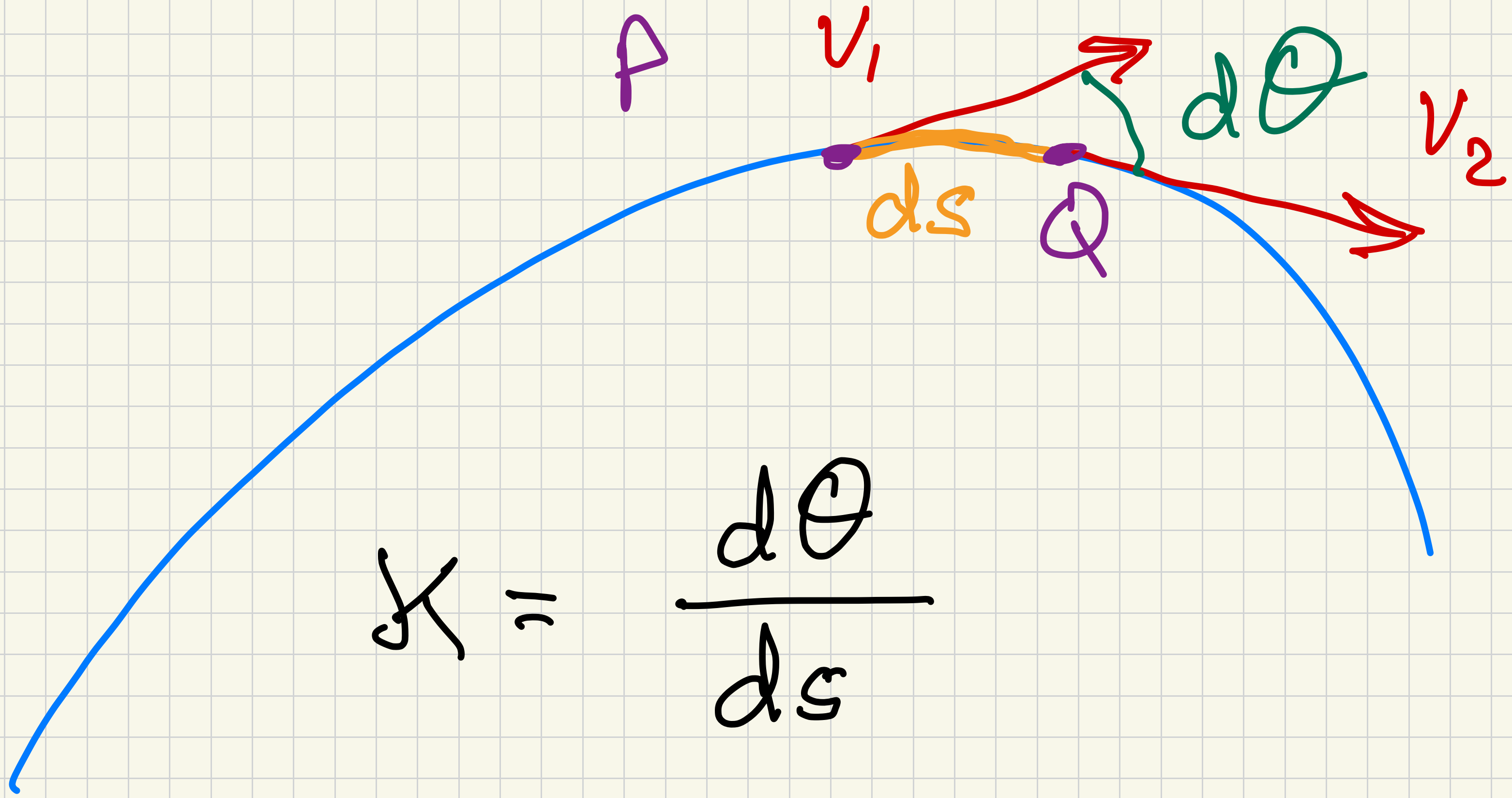

Le Heydar Aliyev Center (Bakou)

Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

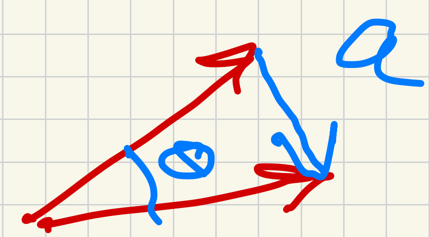
Courbure d'une courbe plane

Philippe Chabloz

Courbure



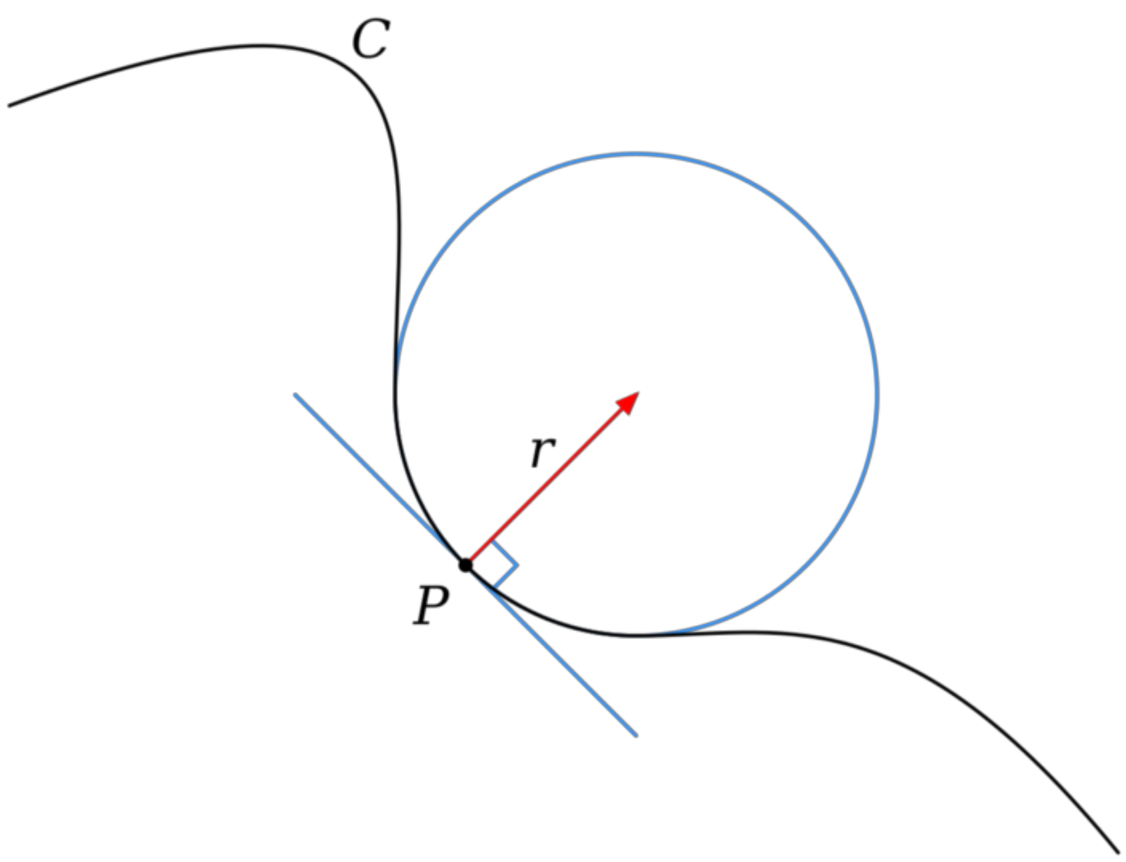
$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$



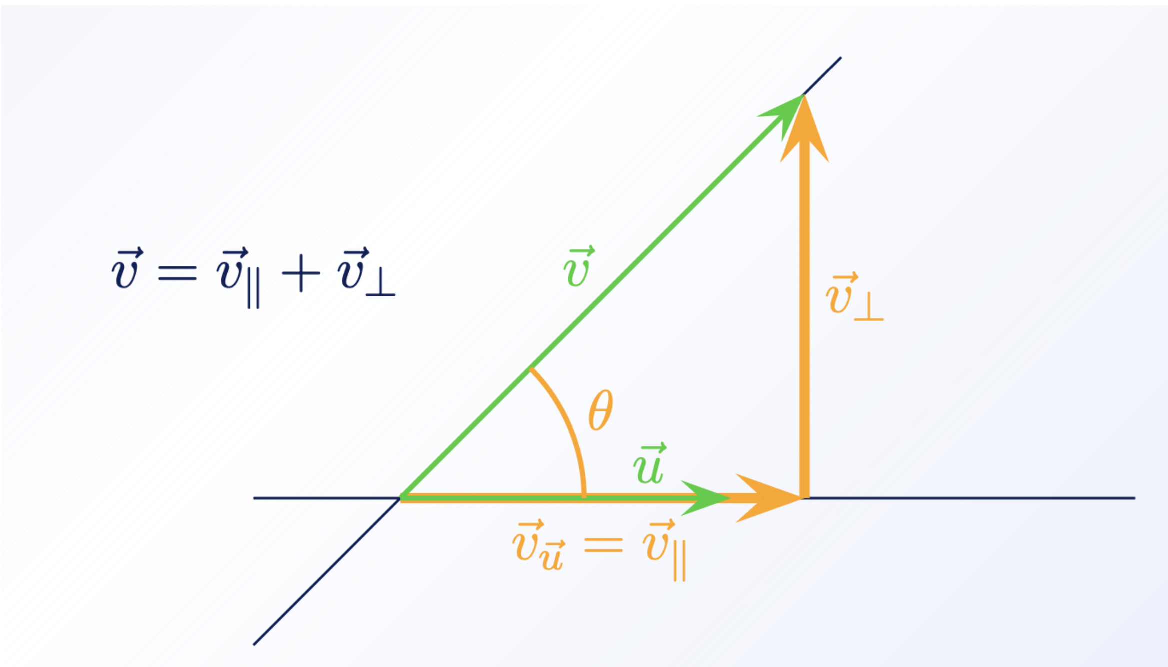
Courbure d’une courbe plane

- **La courbure mesure la manière dont une courbe s'éloigne localement d'une ligne droite.**
- La courbure est égale au rapport entre la variation de la direction de la tangente à la courbe et un déplacement *d’une longueur infinitésimale* sur celle-ci : plus ce rapport est important, plus la courbure est importante.
- *Intuitivement* : la courbure indique de combien il faut tourner le volant d'une voiture pour aborder un virage (volant tourné modérément pour une courbure faible et fortement pour une courbure forte).

$$\textbf{Courbure} = \boldsymbol{\kappa} = \frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{ds}}$$



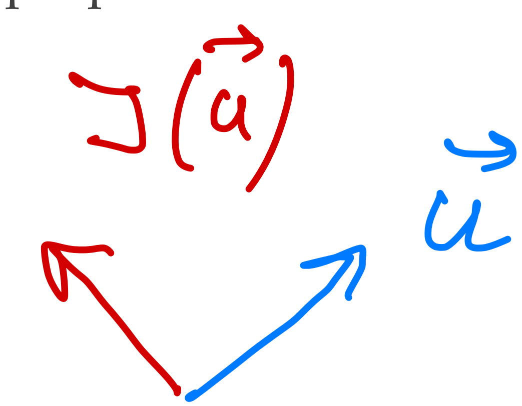
Rappel et notation



$$\|\vec{v}_{\perp}\| = \frac{|\det(\vec{u}, \vec{v})|}{\|\ \vec{u}\ \|}$$

Soit $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ un vecteur du plan. On définit le vecteur $J(\vec{u}) = \binom{-u_2}{u_1}$ qui a les 3 propriétés suivantes:

1. $J(\vec{u}) \perp \vec{u}$ car $\vec{u} \cdot J(\vec{u}) = 0$
2. $\|\ J(\vec{u})\ \| = \|\vec{u}\ \|$
3. La base $\mathcal{B}(\vec{u}, J(\vec{u}))$ est directe $\iff$ $\det\big(\vec{u},\ J(\vec{u})\big) > 0$



Courbure et accélération

Soit c une courbe paramétrée et P un point sur cette courbe. On note ou définit (tout au point P):

$\overrightarrow{c'_P} = \overrightarrow{c'}(t_P)$ **le vecteur tangent ou vecteur vitesse**

$v_P = \left\| \overrightarrow{c'_P} \right\|$ **la vitesse scalaire**

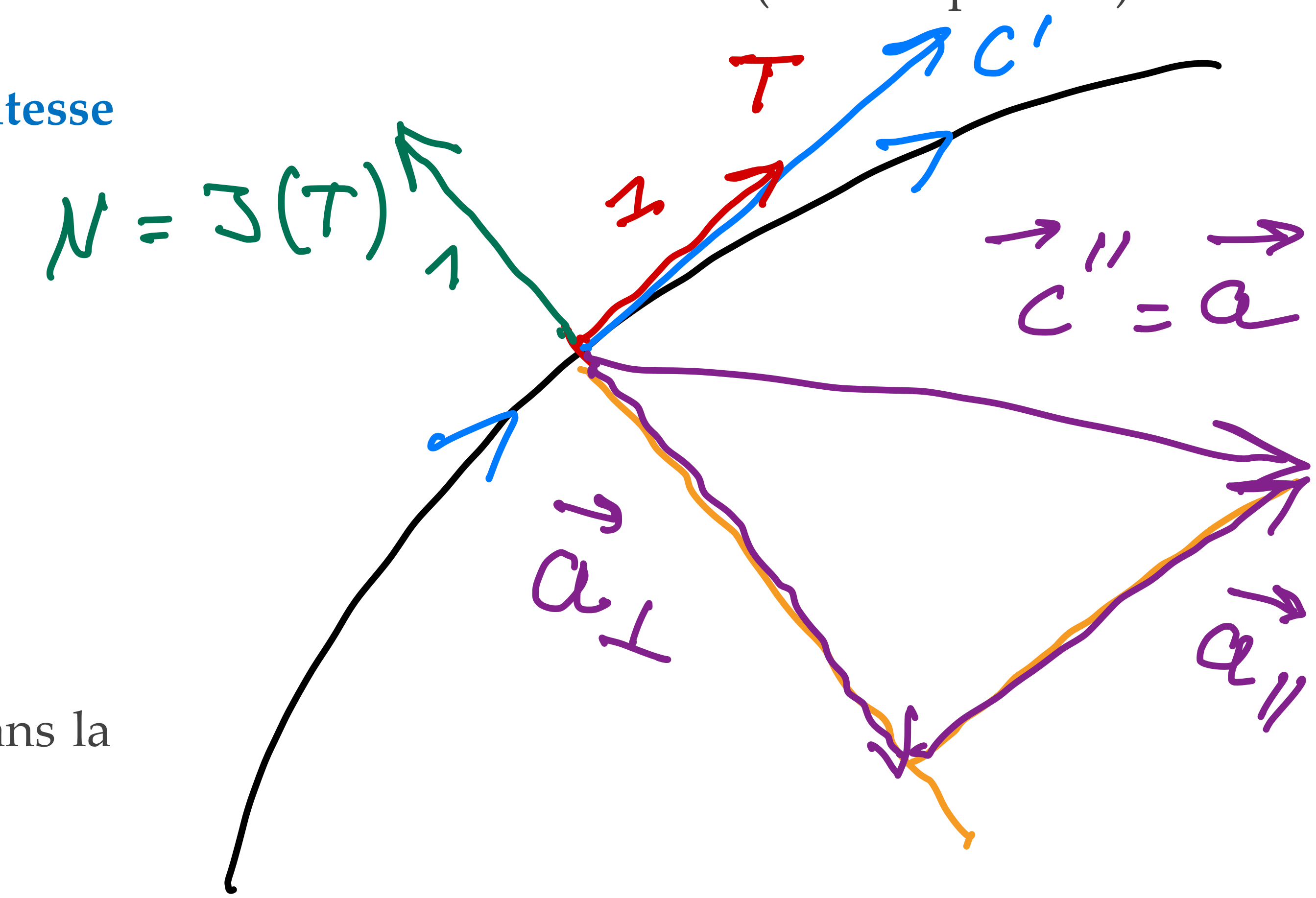
$\vec{T}_P = \dfrac{\overrightarrow{c'_P}}{v_P}$ **le vecteur tangent unitaire**

$\vec{N}_P = J(\vec{T}_P)$ **le vecteur normal unitaire**

$\overrightarrow{c''_P}$ **le vecteur accélération**

On peut décomposer le vecteur accélération dans la base $\mathcal{B}(\vec{T}_P, \vec{N}_P)$ qui est directe. On obtient alors

$$\overrightarrow{c''_P} = \vec{c}''_{\parallel} + \vec{c}''_{\perp}$$



Le terme $\vec{c}''_{\parallel}$ est **l'accélération tangentielle**. Il est **non nul** (en P) si **c' change de norme** (en P) → la vitesse scalaire change en P.

Le terme $\vec{c}''_{\perp}$ est **l'accélération centripète**. Il est **non nul** (en P) si **c' change de direction** (en P) → courbure !!

$$\gamma(t) = c(3t)$$

$$\gamma'(t) = 3c'(3t)$$

$$\gamma''(t) = 9 \cdot c''(3t)$$

3^2

γ représente la "même" courbe que c mais parcourue <u>3 fois</u> plus vite

Pour que la courbure ne dépende pas de v il faut diviser par v^2

$$\kappa = \frac{\|\vec{a}_\perp\|}{v^2} = \frac{\|\vec{a}_\perp\|}{\|c'\|^2}$$

Or $\|\vec{a}_\perp\| = \dfrac{\det(c', c'')}{\|c'\|}$ $\Rightarrow$ $\kappa = \dfrac{\det(c', c'')}{\|c'\|^3}$

Rappel slide 34

$1 + 2 = 3$

Courbure et accélération

On peut montrer que l'accélération centripète $\vec{c}''_\perp$ dépend du paramétrage et donc de la vitesse.
En fait **sa norme $\|\vec{c}''_\perp\|$ est proportionnelle à v^2**.

En effet supposons que l'on parcourt la courbe 3 fois plus vite : $c(s) = c(3t)$. En dérivant 2 fois on obtient:

$$c'(s) = 3 \cdot c'(3t) \qquad \text{puis} \qquad c''(s) = 3^2 \cdot c''(3t)$$

(Dans un rond-point de rayon donné, plus on roule vite, plus l'accélération centripète est grande : elle croît selon v^2. C'est ce qui explique qu'avec des pneus donnés (une adhérence donnée), il y a une vitesse limite dans un virage)

Pour avoir la courbure de la courbe c qui ne dépende pas de la vitesse de parcours de la courbe, il faut diviser la norme de $\vec{c}''_\perp$ par v^2. Ainsi on définit la courbure comme

$$\boldsymbol{\kappa = \frac{\|\vec{c}''_\perp\|}{v^2}}$$

Par le rappel du slide 25 on a $\quad \|\vec{c}''_\perp\| = \dfrac{\det(\overrightarrow{c'}, \overrightarrow{c''})}{\|\overrightarrow{c'}\|} = \dfrac{\det(\overrightarrow{c'}, \overrightarrow{c''})}{v}$

dépend de v
" de v^2

En combinant les deux on a :

$$\boldsymbol{\text{Courbure} = \kappa = \frac{\det(\overrightarrow{c'}, \overrightarrow{c''})}{v^3}}$$

Courbure d'une courbe plane

Soit c une courbe sous forme paramétrique

$$\boldsymbol{c}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

- Alors le vecteur tangent (ou vecteur-vitesse) est $\boldsymbol{c}'(t) = \big(x'(t),\ y'(t)\big)$

  et

$$\mathrm{v}(t) = \|\boldsymbol{c}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

- Le vecteur accélération vaut $\boxed{\boldsymbol{c}''(t) = \big(x''(t), y''(t)\big)}$

- Donc

$$\det(c', c'') = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = x'y'' - x''y'$$

c' c''

➢ On obtient alors la courbure

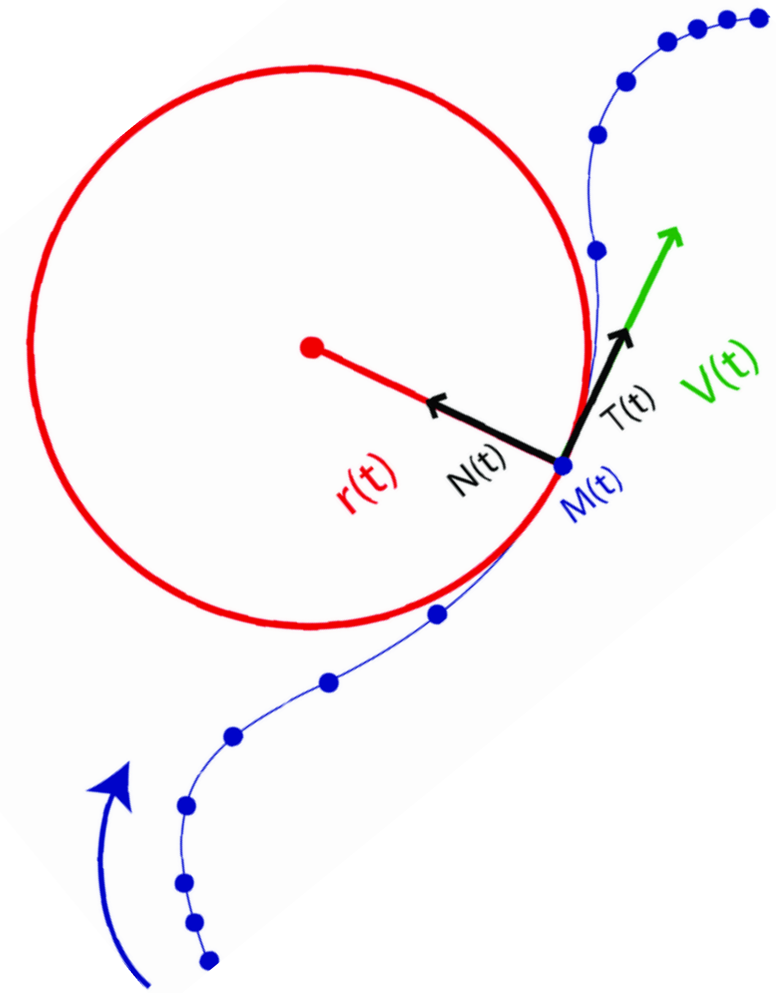
$$\boxed{\text{Courbure} = \kappa = \frac{\det(c',\ c'')}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}}$$

Courbure d’une courbe plane

$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{1}{v^3}\,\boldsymbol{c}''\cdot\vec{N} = \frac{x'y''-x''y'}{v^3} = \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

On peut démontrer que la valeur absolue de la courbure en un point c(t) est indépendant du paramétrage. C’est donc bien une **caractéristique intrinsèque à la courbe** qui ne dépendant pas de la « vitesse de parcours » de cette courbe.

C’est le terme en v^3 au dénominateur qui assure ceci !!



La courbure a un signe qui dépend du sens de parcours de la courbe !!

Si $\kappa > 0$ la courbe tourne dans le sens trigonométrique pour la paramétrisation donnée

Si $\kappa < 0$ la courbe tourne dans le sens inverse du sens trigonométrique pour la paramétrisation donnée.

Si on change le sens de parcours, $\vec{T}$ et $\vec{N}$ change de sens et la courbure change de signe.

Exemple

Soit le cercle de centre $C(a, b)$ et de rayon R. Calculer la courbure en tout point du cercle

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + R\cos t \\ b + R\sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$c'(t) = (-R\sin t,\ R\cos t) \qquad v = \|c'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R$$

$$c''(t) = (-R\cos t,\ -R\sin t)$$

$$\det(c', c'') = \begin{vmatrix} -R\sin t & -R\cos t \\ R\cos t & -R\sin t \end{vmatrix} = R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t = R^2$$

$$\Rightarrow \qquad \kappa = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}$$

Cercle de courbure

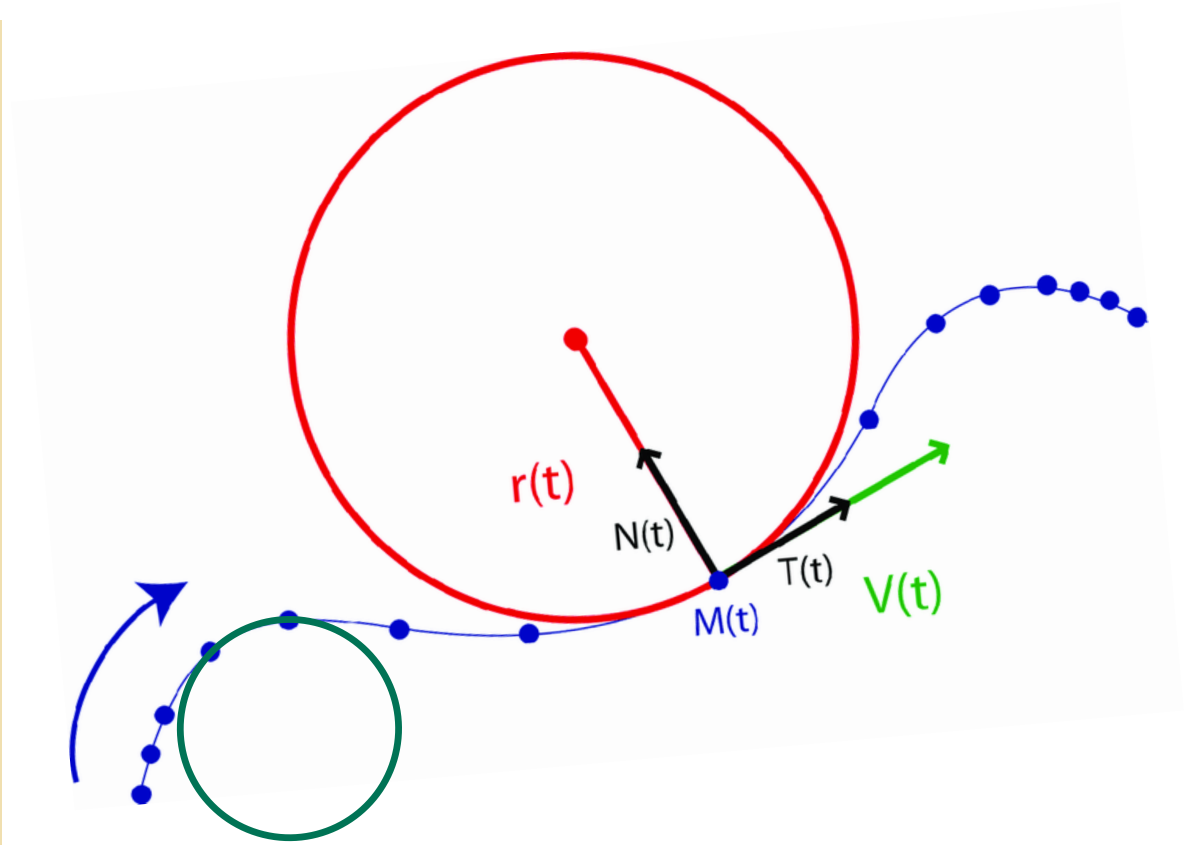
Définitions:

Le cercle rouge à droite se nomme le **cercle osculateur** de la courbe au point P.

Le centre du cercle osculateur en P est appelé **centre de courbure** (en P) et le rayon du cercle osculateur est appelé le **rayon de courbure** (en P).

Par le résultat du slide précédent on a que le rayon de courbure au point P est égal à l'inverse de la courbure (en valeur absolue):

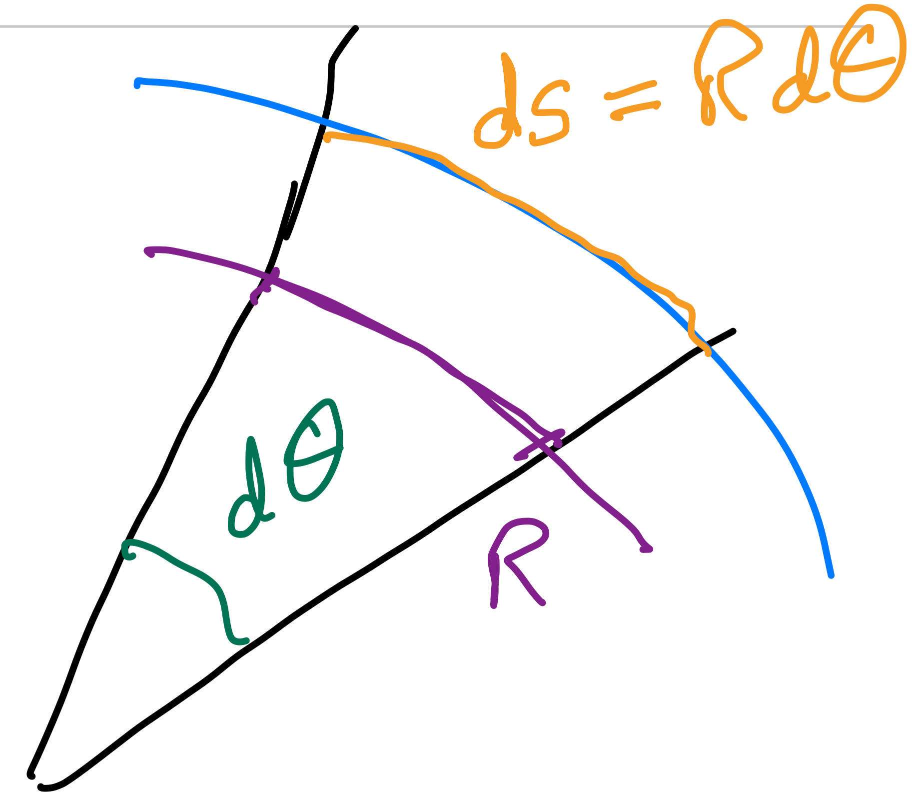
$$\boxed{r_P = \frac{1}{|\kappa_P|}}$$



Courbure d'une courbe plane

Soit un arc de cercle de rayon r et un petit angle $d\theta$. La longueur de l'arc de cercle vaut alors

$$ds = r \cdot d\theta$$



Comme la courbure est l'inverse du rayon de courbure ceci donne

$$ds = \frac{1}{\kappa} \cdot d\theta$$

Et donc

$$\kappa \, ds = d\theta$$

et enfin

$$\boxed{\kappa = \frac{d\theta}{ds}}$$

Ainsi la courbure peut être interprétée comme le taux de rotation du vecteur tangent par unité de longueur.

Courbure : forme cartésienne

$$\text{Courbure} = \kappa = \frac{1}{v^3}\,\boldsymbol{c}'' \cdot \vec{N} = \frac{\det(c', c'')}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Si la courbe est donnée sous forme cartésienne explicite

$$y = f(x)$$

alors la **paramétrisation standard** (voir slide 5)

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

donne $x'(t) = 1$, $x''(t) = 0$, $y'(t) = f'(t)$ et $y''(t) = f''(t)$

puis $c'(t) = \big(1, f'(t)\big)$ et donc $v = \sqrt{1 + f'(t)^2}$

La courbure en un point $P(a, f(a))$ vaut alors

$$\boxed{\kappa(a) = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3} = \frac{f''(a)}{(1 + f'(a)^2)^{3/2}}}$$

Exemple

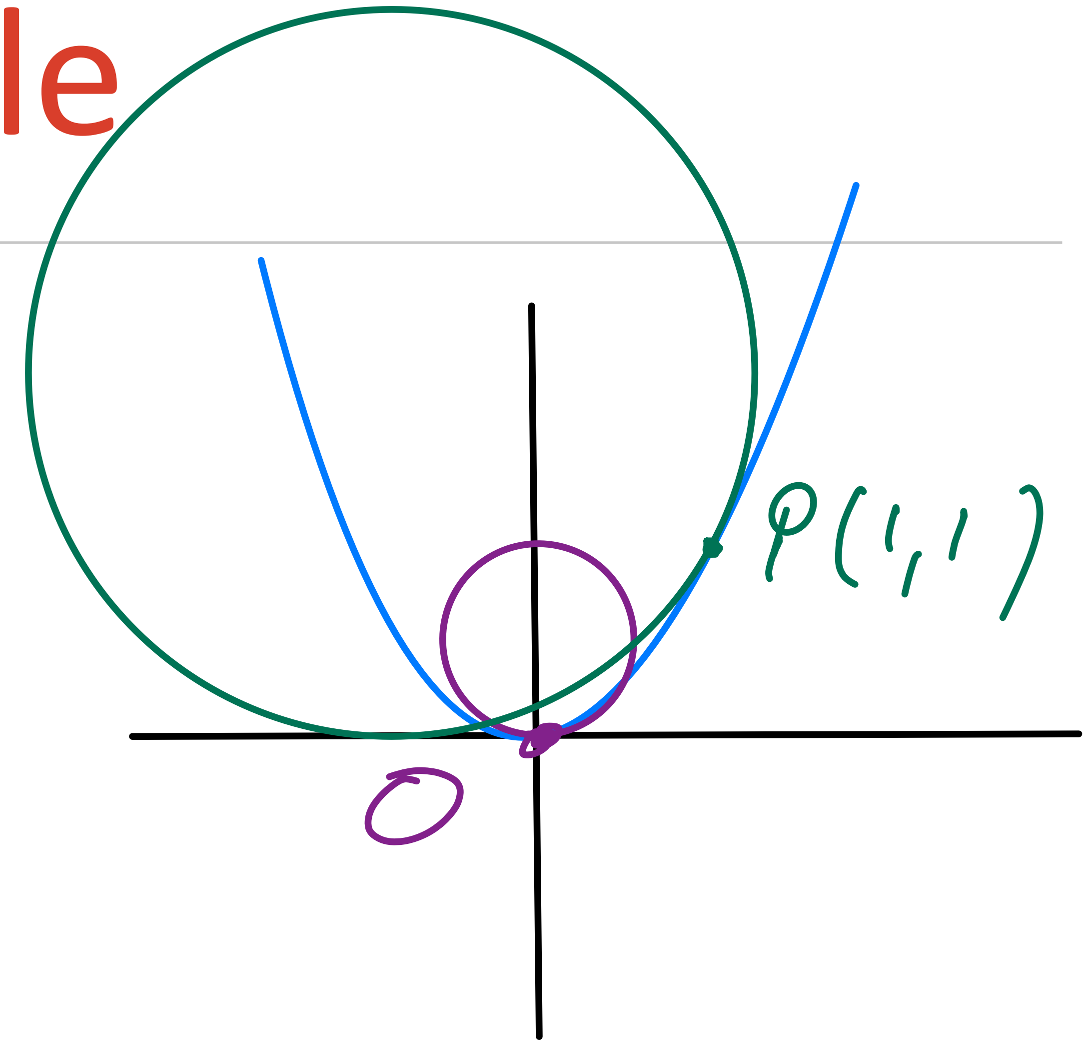
Soit la courbe définie par l'équation $y = x^2$ (parabole).

Calculer la courbure à l'origine $O(0,0)$ et au point $P(1,1)$.

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\left(1+f'(x)^2\right)^{3/2}}$$

$$f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2$$

$$\Rightarrow \quad \kappa(x) = \frac{2}{\left(1+4x^2\right)^{3/2}}$$



$$\kappa(0) = 2 \qquad r_0 = \frac{1}{2}$$

$$\kappa(1) = \frac{2}{(1+4)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{125}} \simeq \frac{2}{11} \simeq 0,\overline{2}$$

$$r_P \simeq \frac{\sqrt{125}}{2} \simeq \frac{11}{2}$$

Exercice

Soit l'ellipse définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(\theta) = 3\cos(\theta) \\ y(\theta) = 2\sin(\theta) \end{cases} \quad \text{où } \theta \in [0,2\pi].$$

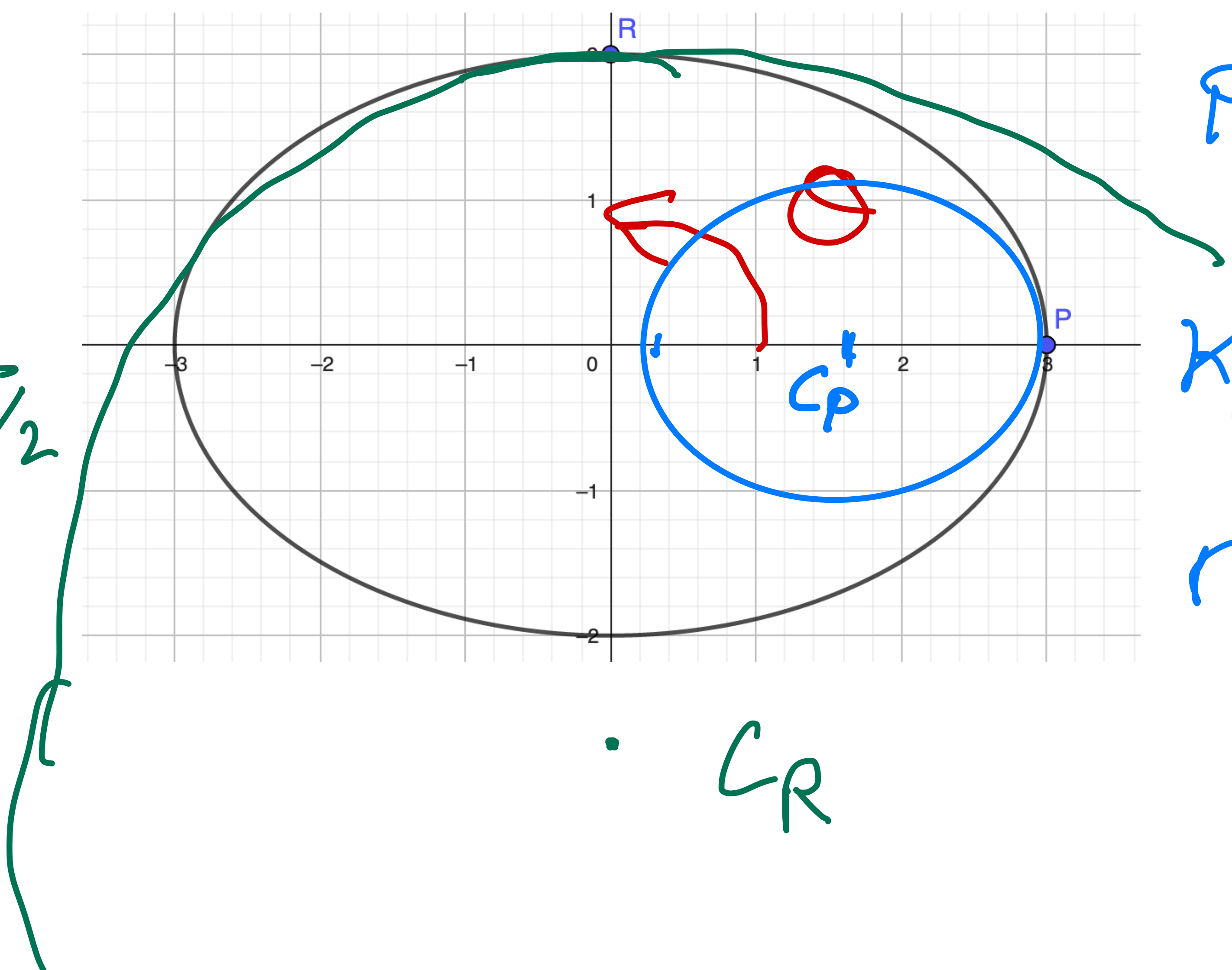
Calculer la courbure aux points $P(3,0)$ et $R(0,2)$.

$$K = \frac{6}{(4 + 5\sin^2\theta)^{3/2}}$$

$R(0,2) \longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$K_R = \frac{6}{(4+5)^{3/2}} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

$$r_R = \frac{9}{2}$$



$P(3,0) \longleftrightarrow \theta = 0$

$$K_P = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$r_P = \frac{4}{3}$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} 3\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -3\sin\theta \\ 2\cos\theta \end{pmatrix} \qquad v(t) = \|c'\| = \sqrt{9\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{9\sin^2\theta + 4(1-\sin^2\theta)}$$

$$= \sqrt{5\sin^2\theta + 4}$$

$$c''(t) = \begin{pmatrix} -3\cos\theta \\ -2\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \det(c', c'') = \begin{vmatrix} -3\sin\theta & -3\cos\theta \\ 2\cos\theta & -2\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= 6\sin^2\theta + 6\cos^2\theta = 6$$

$$\Rightarrow \quad \kappa = \frac{6}{\left(5\sin^2\theta + 4\right)^{3/2}}$$

Exercice

Soit la courbe définie par l'équation $y = x^3$. Calculer la courbure, ainsi que le rayon de courbure aux point $P(1,1)$ et $Q(2,8)$.

$$K(x) = \frac{f''(x)}{\left[1 + f'(x)^2\right]^{3/2}}$$

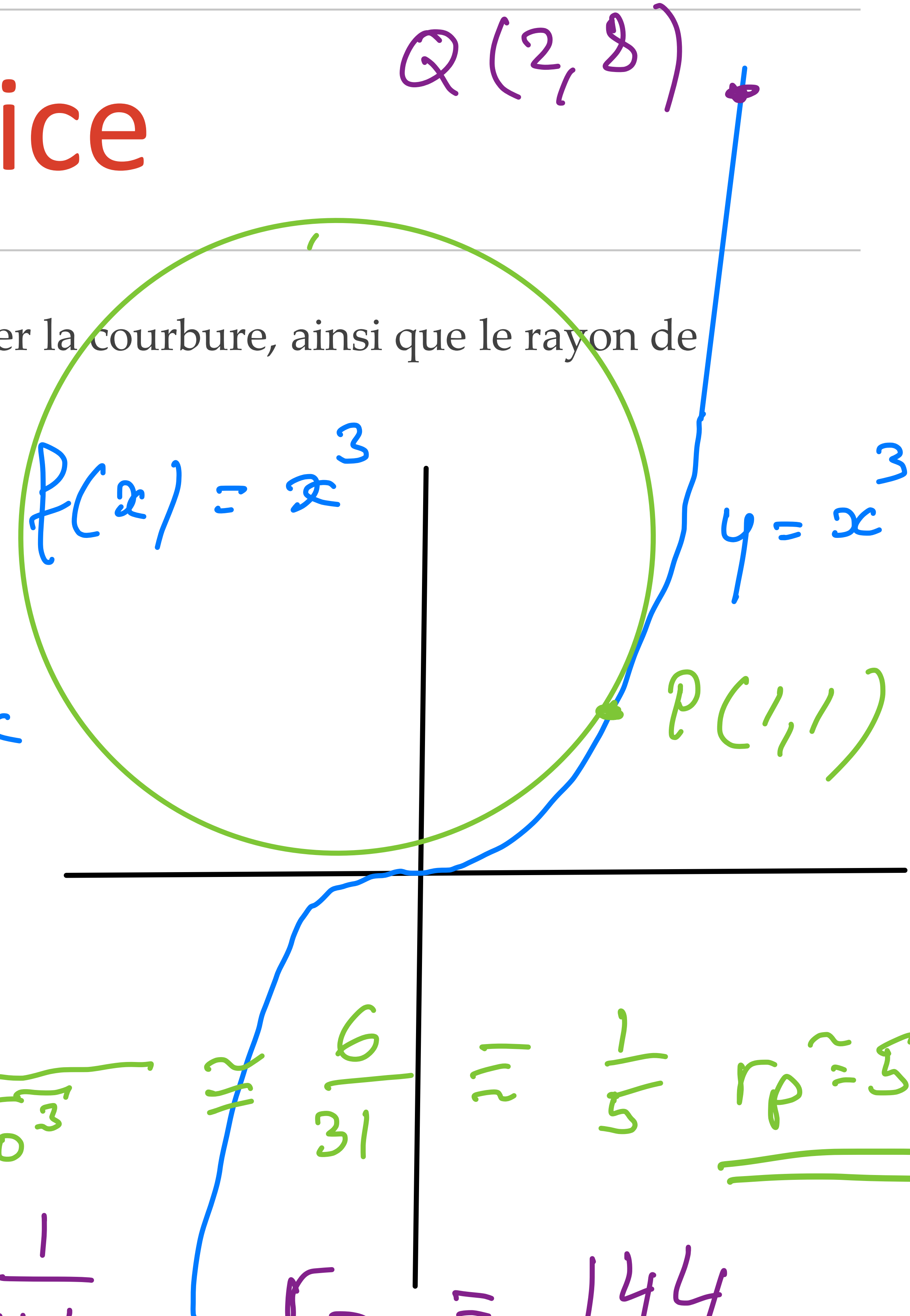
$$f(x) = x^3$$

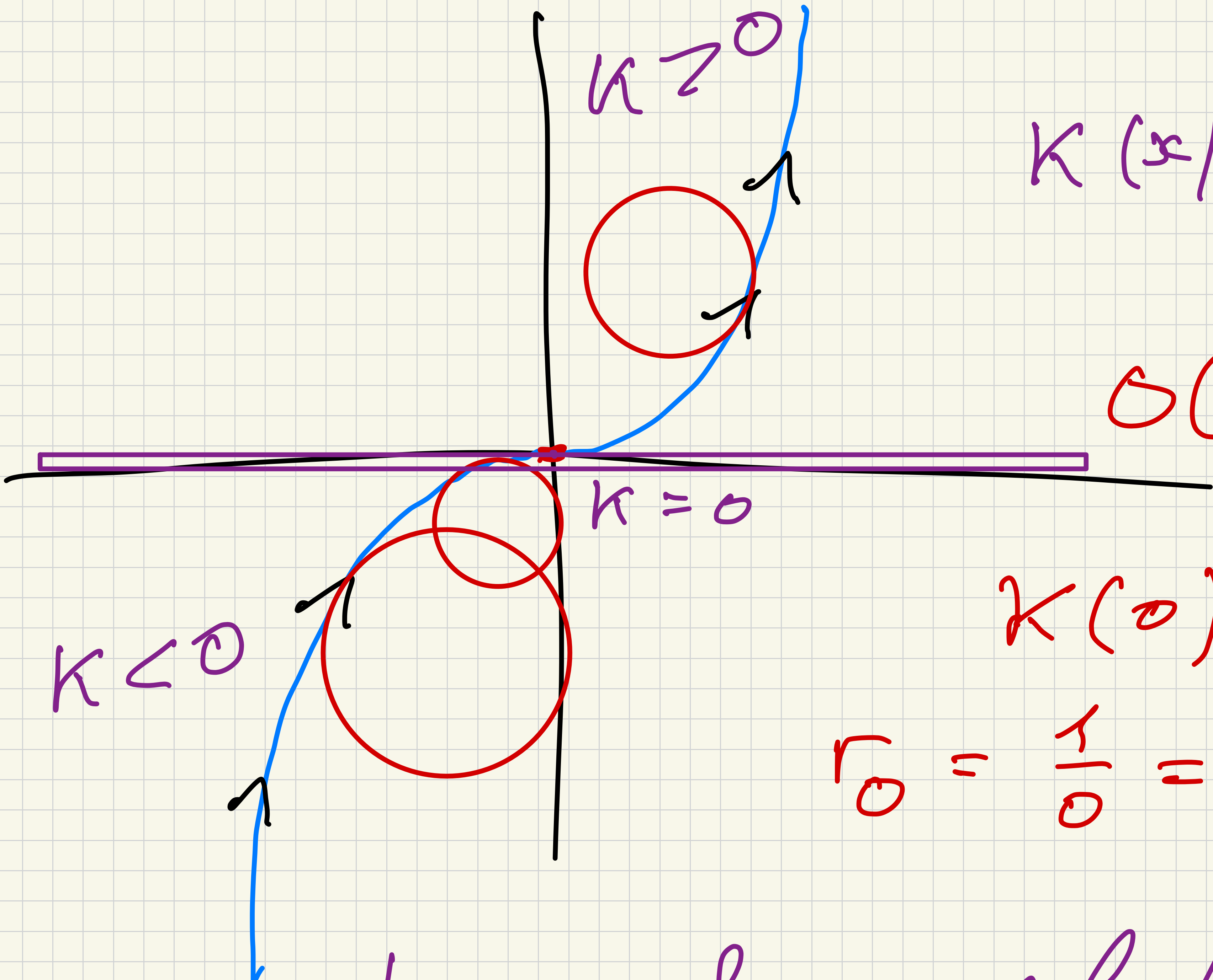
$$f'(x) = 3x^2 \qquad f''(x) = 6x$$

$$K(x) = \frac{6x}{(1 + 9x^4)^{3/2}}$$

$$P(1,1): \quad K_P = K(1) = \frac{6}{\sqrt{10^3}} \cong \frac{6}{31} \cong \frac{1}{5} \qquad r_P \cong 5$$

$$K(2) = \frac{12}{(145)^{3/2}} \cong \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144} \qquad r_Q = 144$$





$$K(x) = \frac{6x}{(1+9x^4)^{3/2}}$$

$O(0,0)$ $x = 0$

$$K(0) = \frac{0}{1^{3/2}} = 0$$

$$r_0 = \frac{1}{0} = +\infty$$

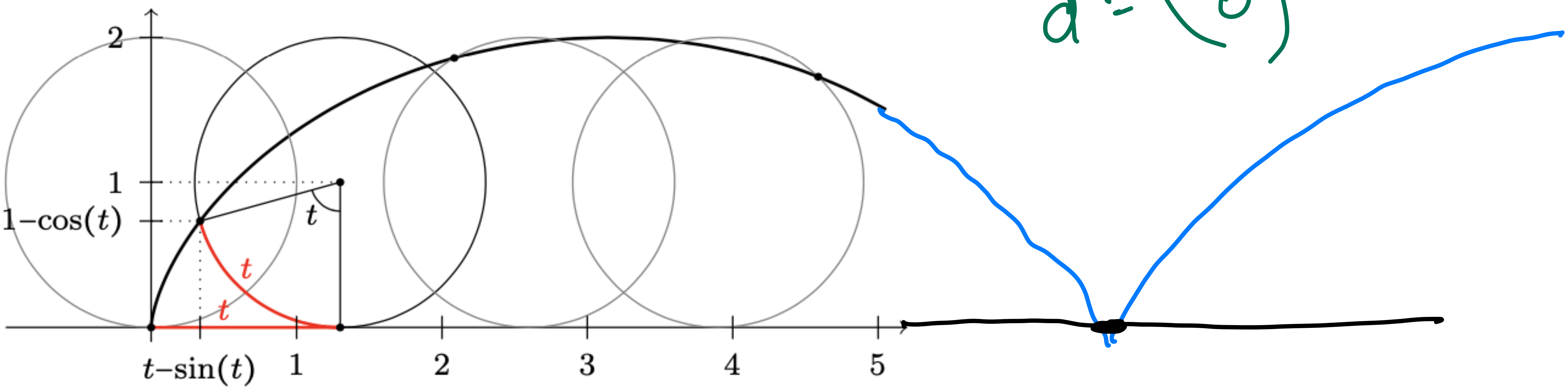
Le cercle osculateur en O est une droite !! $\boxed{y = 0}$

Une droite peut être vue comme un cercle de rayon ∞

$$\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La cycloïde

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



La cycloïde est une courbe plane, trajectoire d'un point fixé à un cercle (de rayon 1) qui roule sans glisser sur une droite.

La courbe peut être définie paramétriquement par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases} \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}} - \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

ce qui correspond à l'équation cartésienne :

$$x = \arccos(1 - y) - \sin(\arccos(1 - y)).$$

Exemple de dérivation implicite

$$(\gamma) \quad e^{xy^2} + 2x + 4y^2 - 1 = 0$$

$$P(0,0)$$

$$\underbrace{e^{x\,y(x)^2}} + 2x + 4\,y(x)^2 - 1 = 0$$

$$e^{x\,y(x)^2} \cdot \left(1 \cdot y(x)^2 + x \cdot 2\,y(x) \cdot y'\right) + 2$$

$$+ 8\,y(x) \cdot y' = 0$$

$$y'\left(2xy\,e^{xy^2} + 8y\right) = -2 - y^2 \cdot e^{xy^2}$$

$$y' = \frac{-2 - y^2 e^{xy^2}}{2xye^{xy^2} + 8y}$$

$P(0,0) \Rightarrow y'_P = \frac{-2}{0} = -\infty$

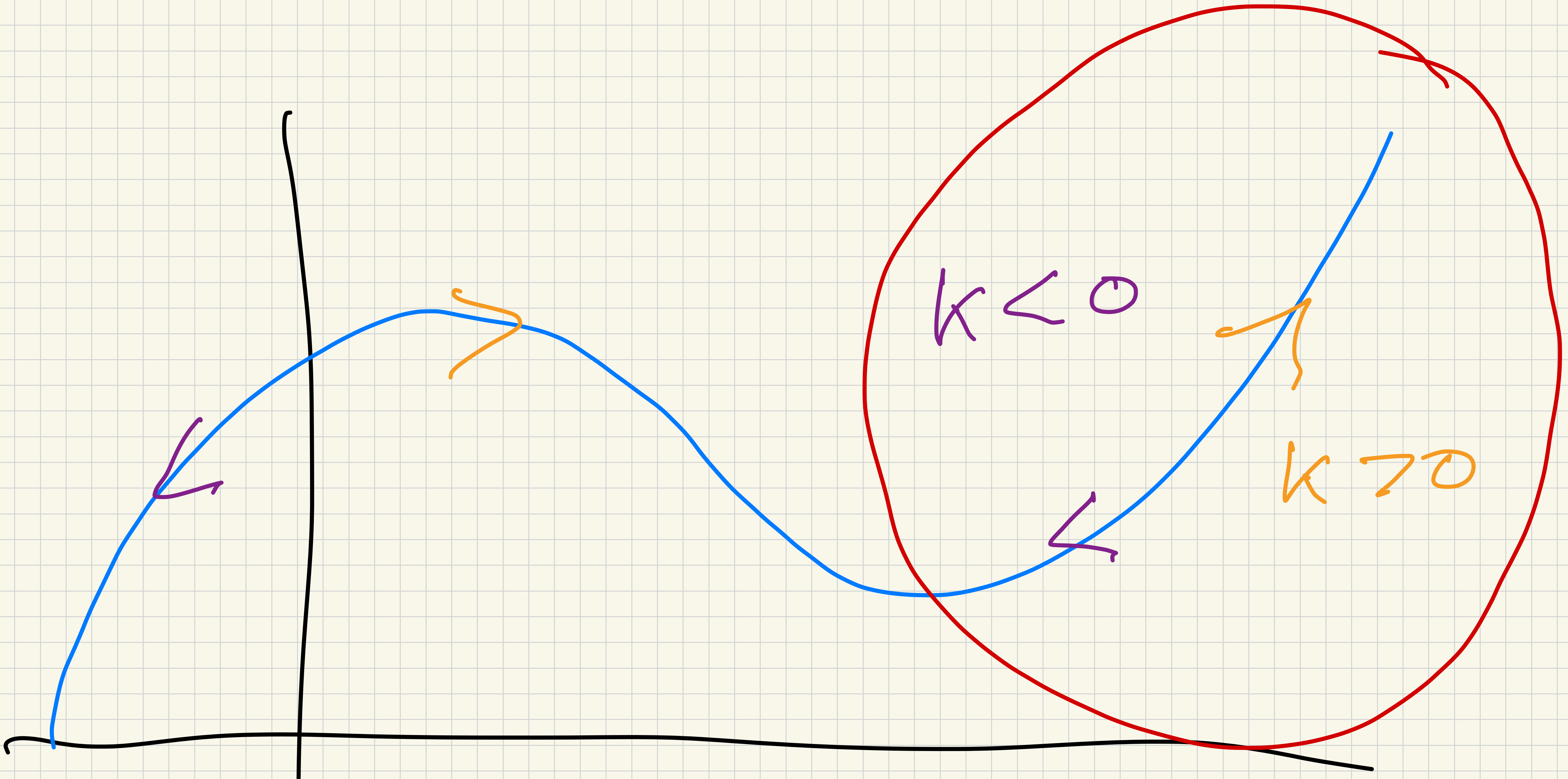
$\Rightarrow$ Le vecteur tangent est vertical

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut prendre

mais aussi

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$



⚠ Le signe de la courbure dépend du sens de parcours !! voir slide 39