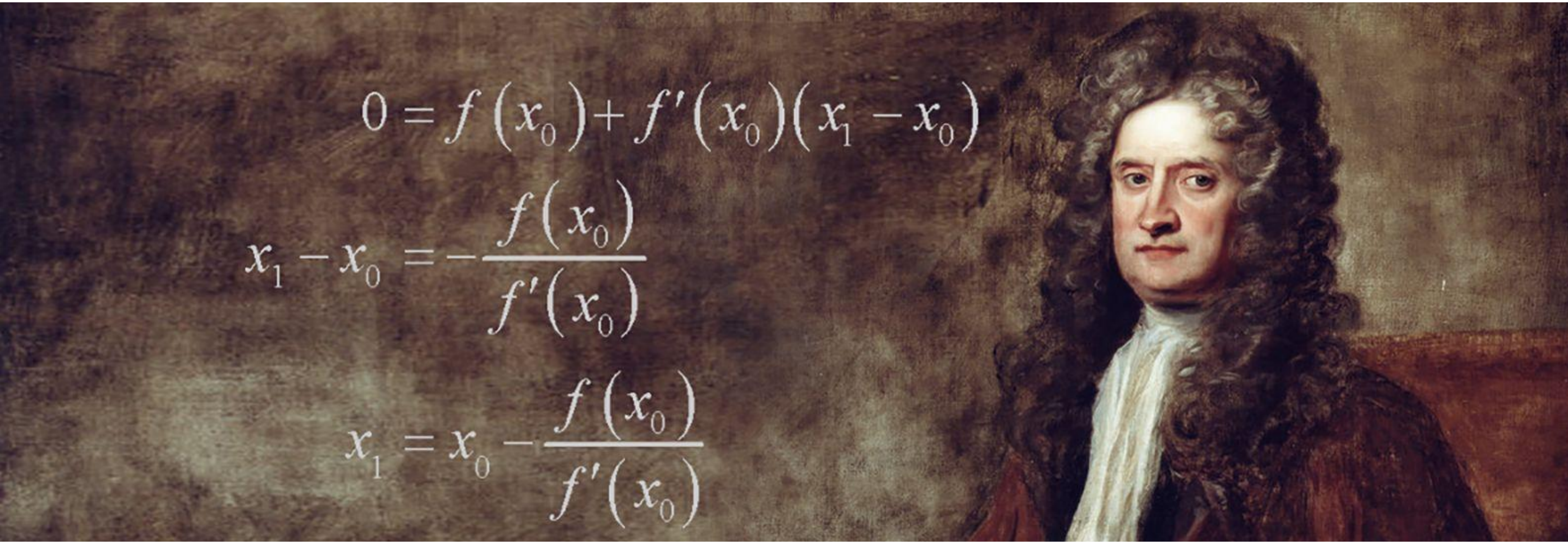


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Limites et dérivées

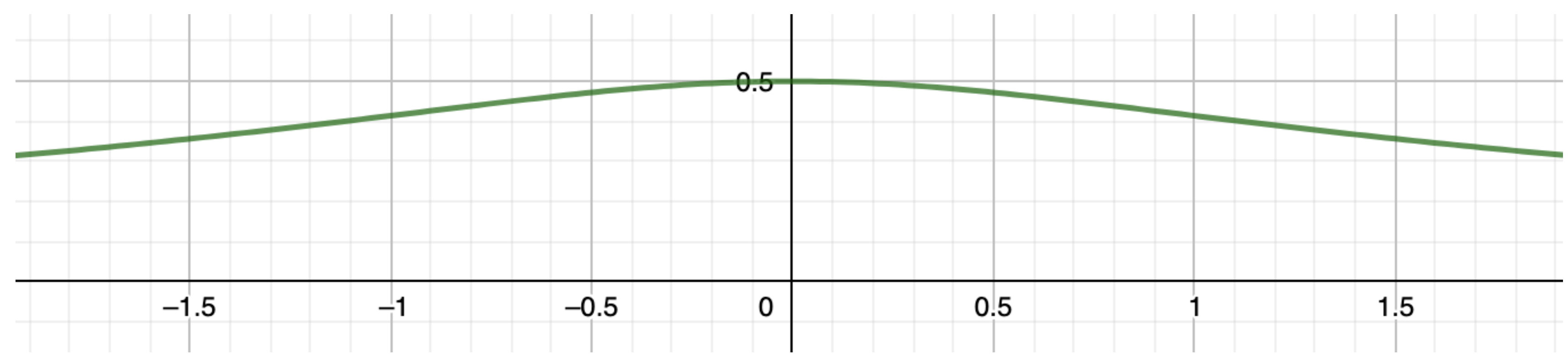
Philippe Chabloz

Limite de f au point x_0

Exemple introductif : considérons la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}.$$

Elle n'est pas définie en $x = 0$ ($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$) mais si on observe les valeurs de f ainsi que son graphe on constate que la fonction se comporte comme si sa valeur en $x = 0$ était égale à $1/2$.



x	$f(x)$
-0.1	0.4987562
-0.01	0.4999875
-0.001	0.4999999

x	$f(x)$
0.1	0.4987562
0.01	0.4999875
0.001	0.4999999

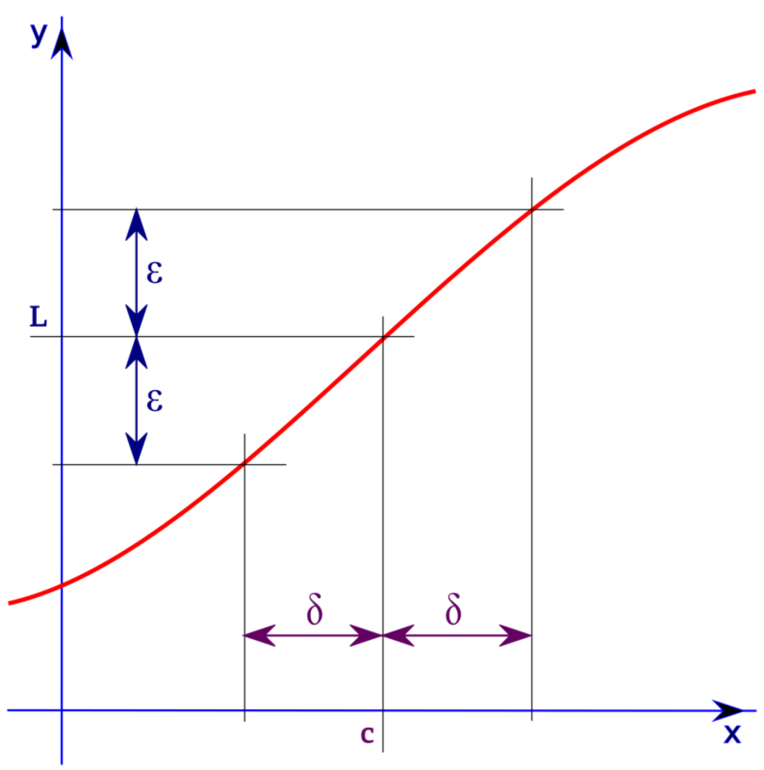
Limite d'une fonction

Supposons que f soit une fonction à valeur réelle et que c et L soient des nombres réels. *Intuitivement*, l'expression

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

signifie que $f(x)$ **peut être rendu aussi proche de** L **que souhaité, en rendant** x **suffisamment proche de** c.

Dit autrement, la fonction $f(x)$ a pour limite le nombre L quand x tend vers c si l'écart entre $f(x)$ et L finit toujours par être plus petit que n'importe quelle marge fixée, pourvu que x soit suffisamment proche de c, mais non égal à c.



(ε, δ)-définition de la limite

Augustin-Louis Cauchy et Karl Weierstrass (XIXe siècle) :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- " $f(x)$ *devient arbitrairement proche de* L" signifie que $f(x)$ se trouve finalement dans l'intervalle $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.
- L'expression "*lorsque* x *s'approche de* c" indique alors que nous nous référons à des valeurs de x dont la distance par rapport à c est inférieure à un certain nombre positif δ.

Limite gauche et droite

La **limite à gauche de $f(x)$ en c** (ou la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers c *par la gauche*) est égale à L et on note

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de c mais **strictement inférieur à** c.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D}_f - \delta < x - c < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

La **limite à droite de $f(x)$ en c** (ou la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers c *par la droite*) est égale à L et on note

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de c mais **strictement supérieur à** c.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{D}_f 0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Propriété

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

Propriétés algébriques des limites

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies au voisinage de c, mais pas forcément en c, telles que

$$\lim_{x\to c} f(x) = L_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to c} g(x) = L_2$$

Alors :

1. $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$
2. $\lim\limits_{x\to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L_1$ quel que soit $k \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$
4. $\lim\limits_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$

Les propriétés précédentes s'appliquent aussi aux limites à droite ou à gauche.

Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de c, mais pas forcément en c, telles que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \lim_{x \to c} h(x) = L$$

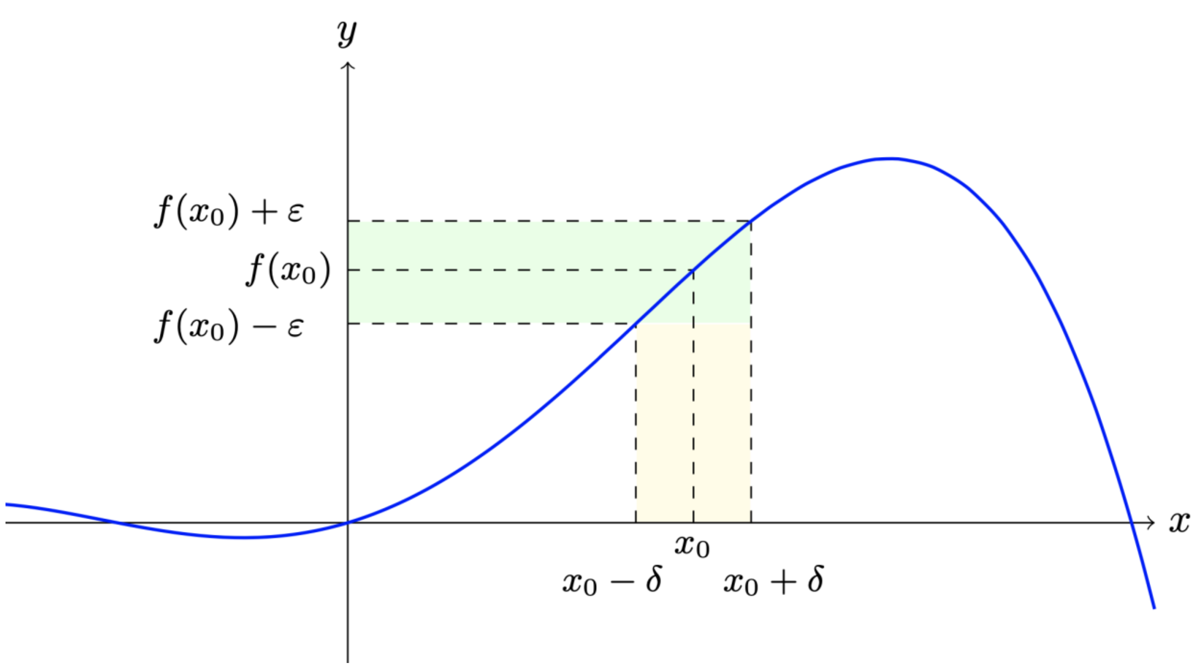
alors

$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

Continuité d'une fonction en un point

Définition: une fonction f **est dite continue en** x_0 si elle est définie en x_0 et si sa limite lorsque x tend vers x_0 est égale à $f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$



Les fonction « *classiques* », c.-à-d. les fonctions **polynomiales** et **rationnelles**, les **exponentielles** et les **logarithmes**, les **fonctions trigonométriques** et leurs **réciproques**, les **fonctions hyperboliques** et leurs **réciproques**, sont continues sur leur domaine définition (c.-à-d. qu'elles sont continues en tout point de leur domaine de définition).

Les **sommes**, **produits**, **quotients** et **composées** de fonctions continues sont continues sur leur domaine de définition.

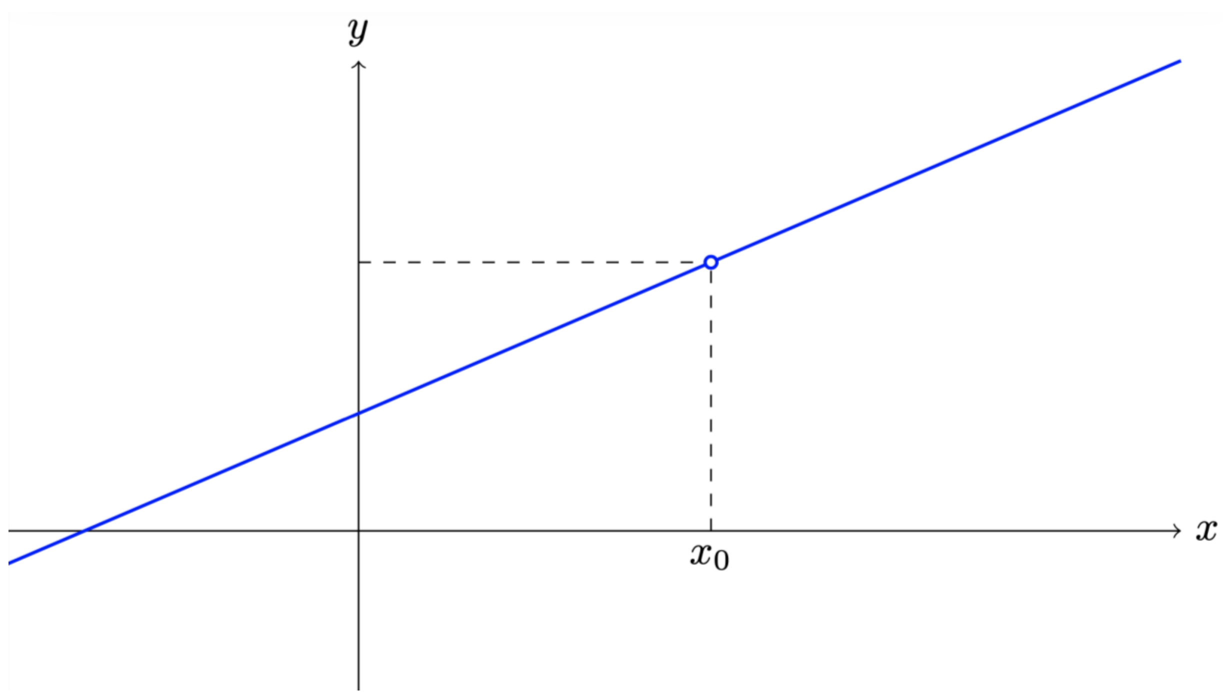
La fonction $f(x)$ peut être définie en x_0 mais sa limite lorsque x tend vers x_0 peut être différente de $f(x_0)$. Dans un tel cas, la fonction f **est dite discontinue en** x_0.

Exemples de fonctions discontinues

Exemple (*trou*)

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$$

est discontinue en $x_0 = 3$.

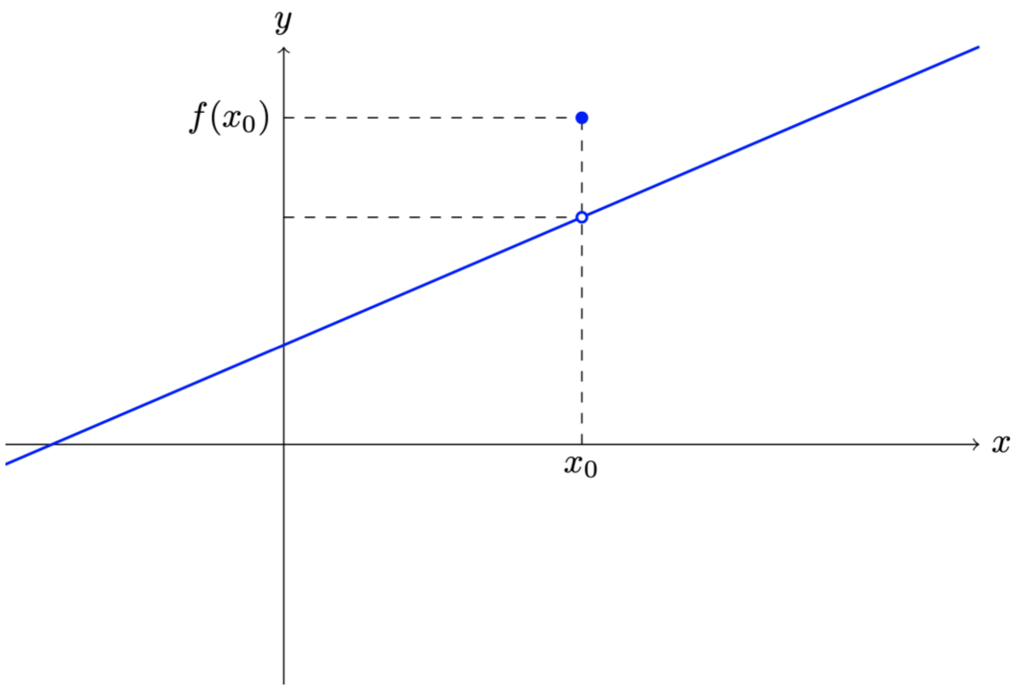


$\boxed{f(x_0) \text{ n'existe pas !}}$

Exemple (*déplacement*)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si\ x \neq 5 \\ 9 & si\ x = 5 \end{cases}$$

est discontinue en $x_0 = 5$.



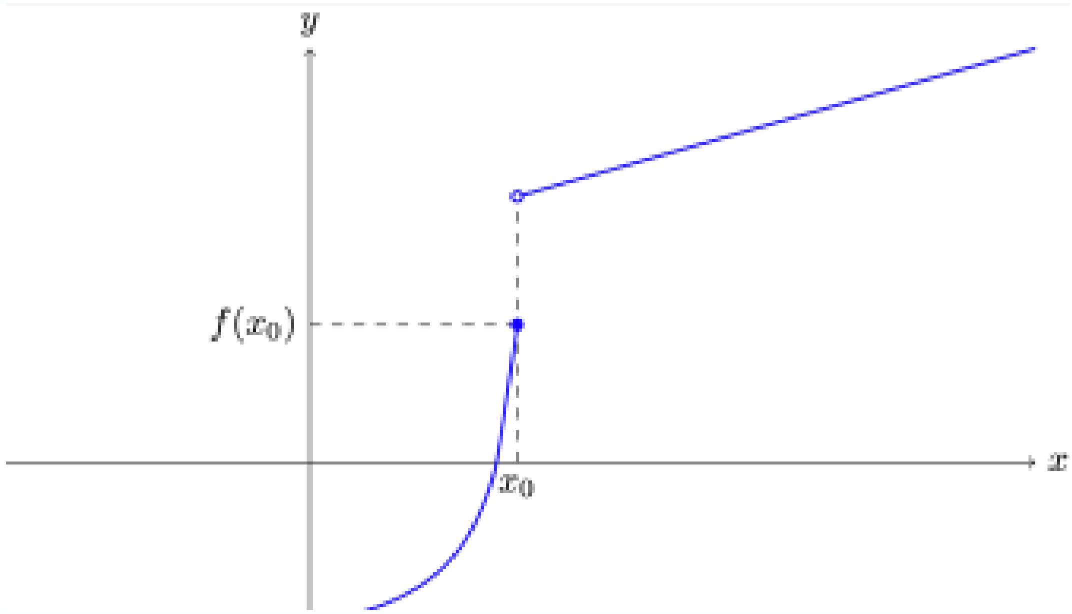
$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)}$

Discontinuités apparentes de *saut* et *infinie*

Exemple (*saut*)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

est discontinue en $x_0 = 2$.

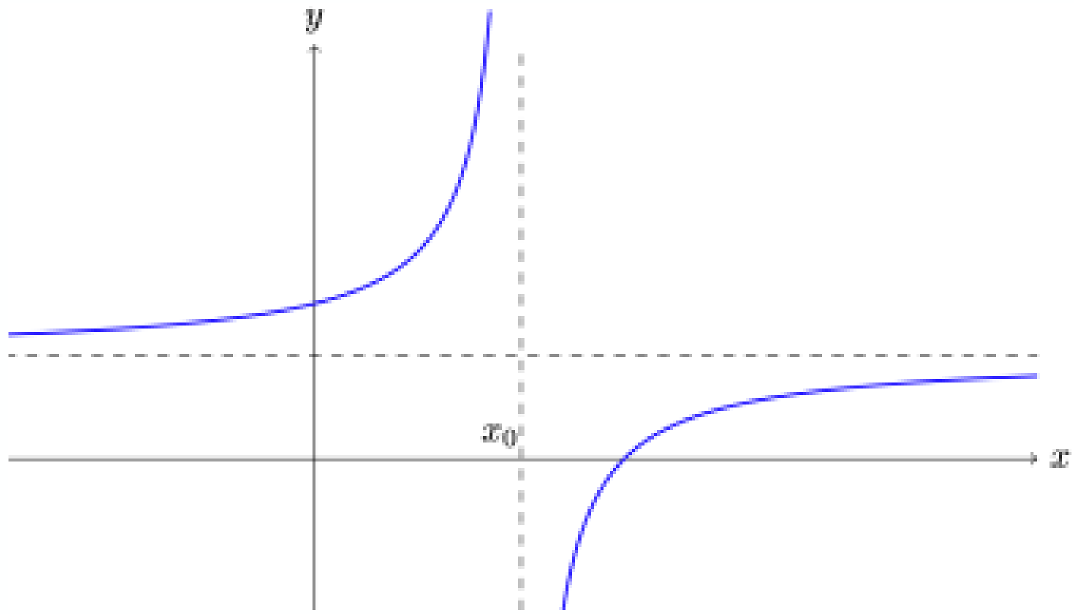


$$\boxed{\begin{array}{c} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \end{array}}$$

Exemple (*infinie*)

$$f(x) = \frac{x-3}{x-2}$$

est discontinue en $x_0 = 2$.



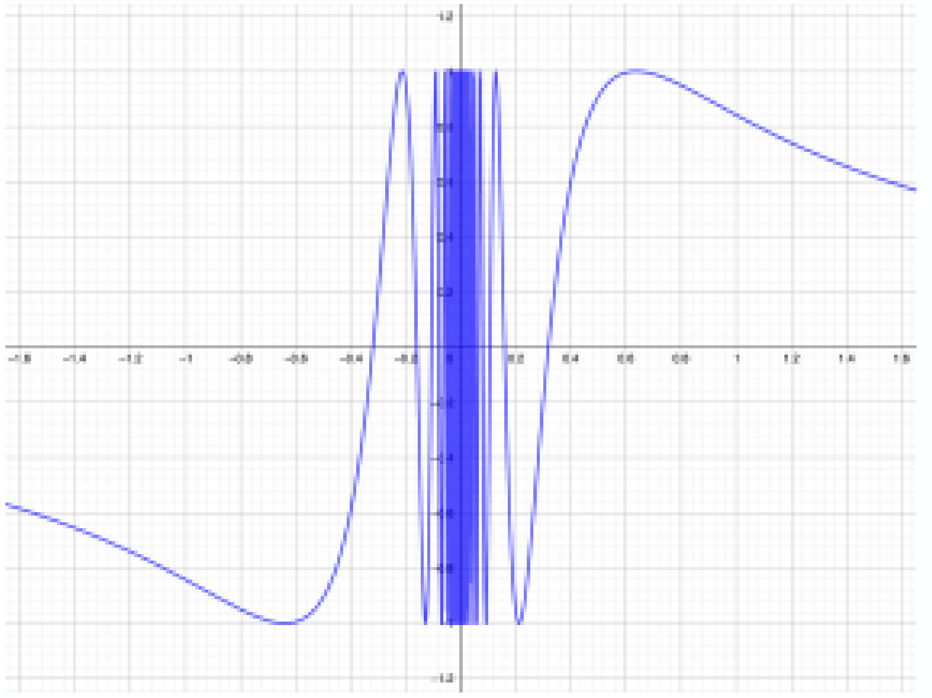
$$\boxed{\begin{array}{c} f(x_0) \text{ n'existe pas !} \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \end{array}}$$

Discontinuité *essentielle*

Exemple (*Cauchy* 1821)

La fonction $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

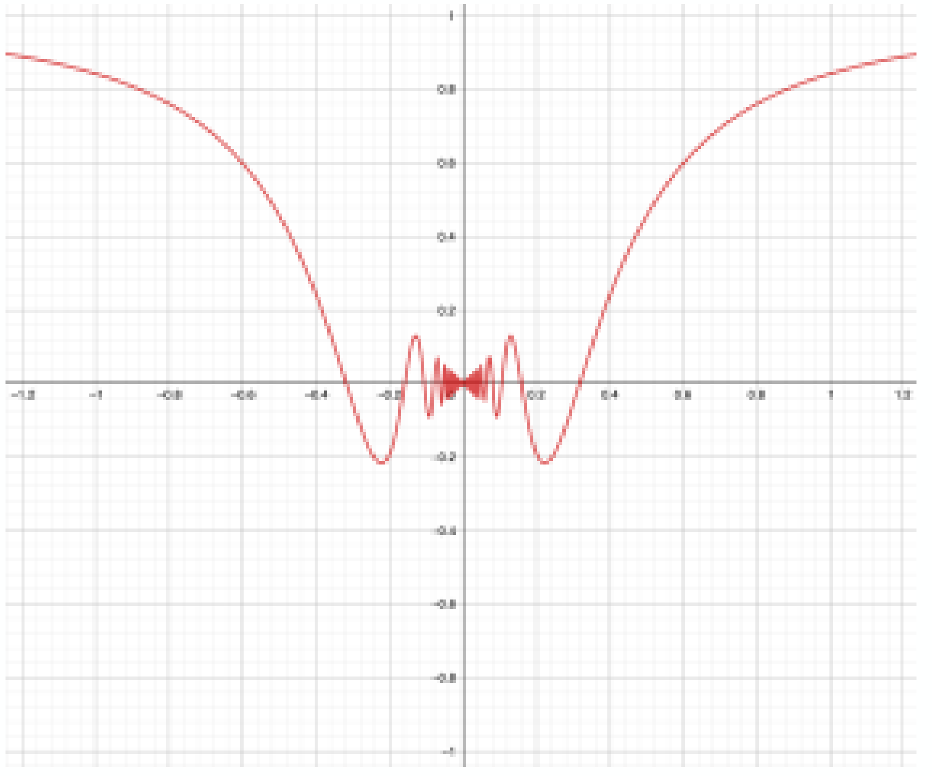
est discontinue en $x_0 = 0$ car $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ n'existent pas !



Exemple (*Weierstrass 1874*)

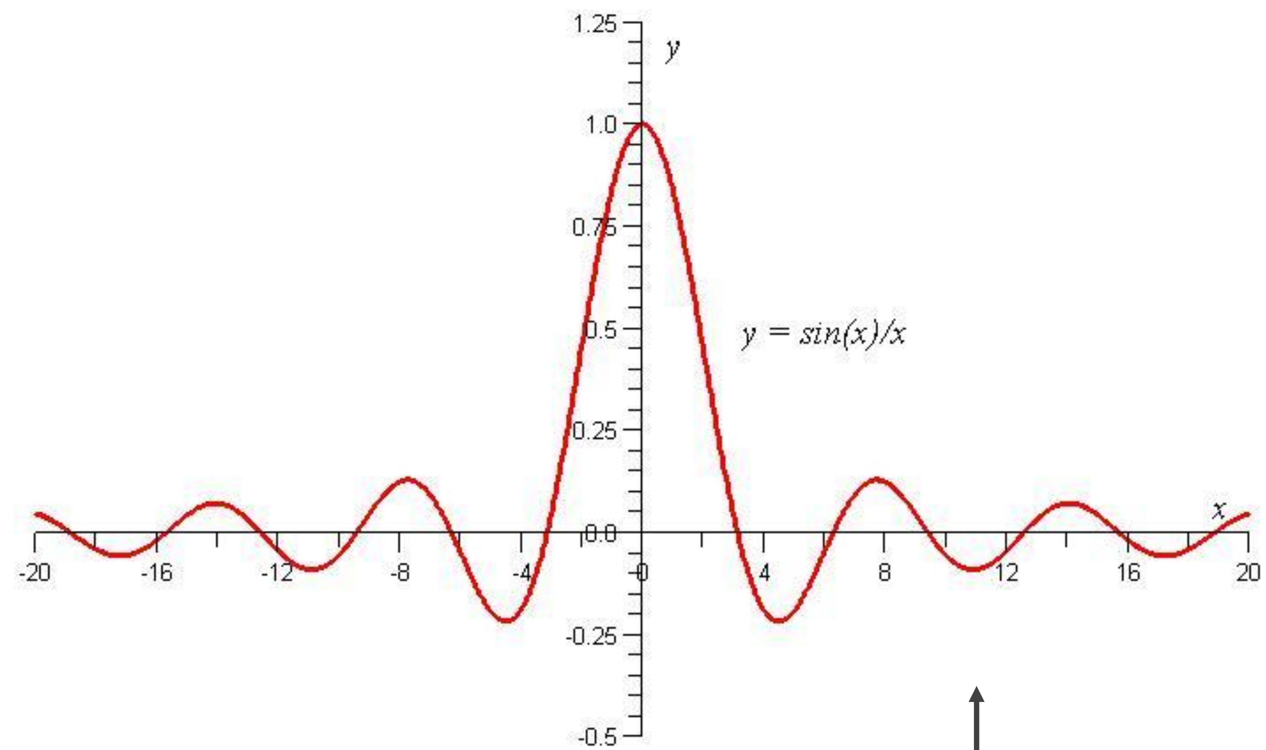
La fonction $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

est continue en $x_0 = 0$.



Exemple $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$?

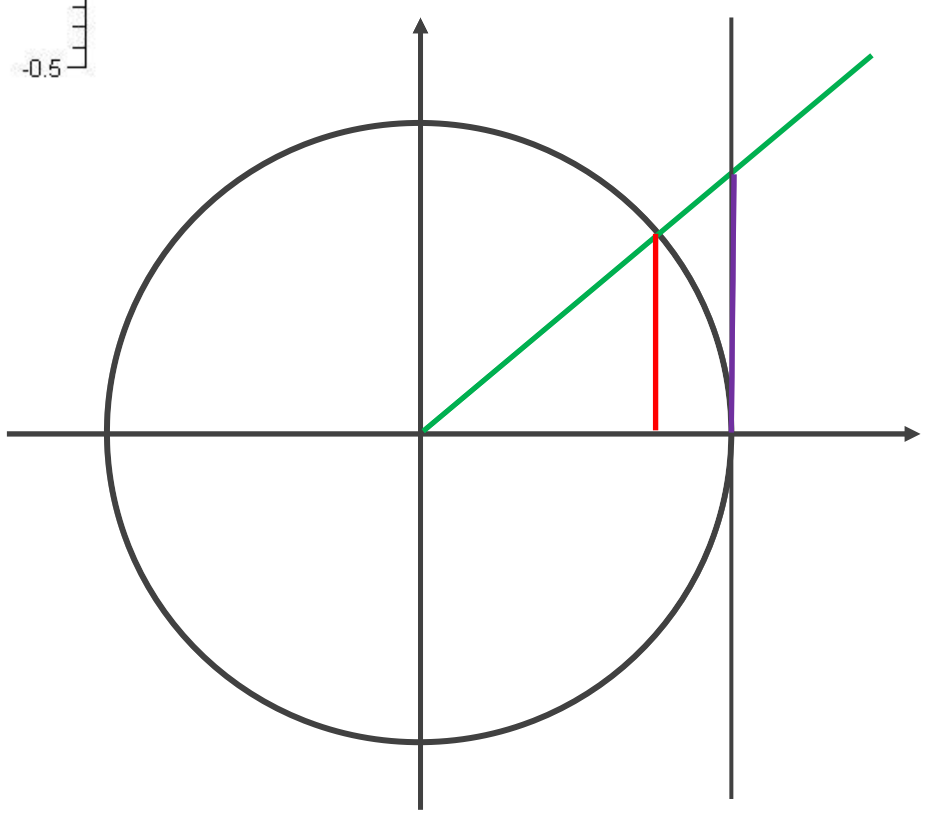


3 façons (au moins) de lever l'indétermination:

1. majoration
2. série de Taylor
3. règle de l'Hospital

1. Majoration : pour **x petit** on a

$$\sin(x) < \boldsymbol{x} < \tan(x)$$



En divisant par sin x on obtient

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

En faisant tendre x vers 0 on obtient, par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Exemple $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Série de Taylor:

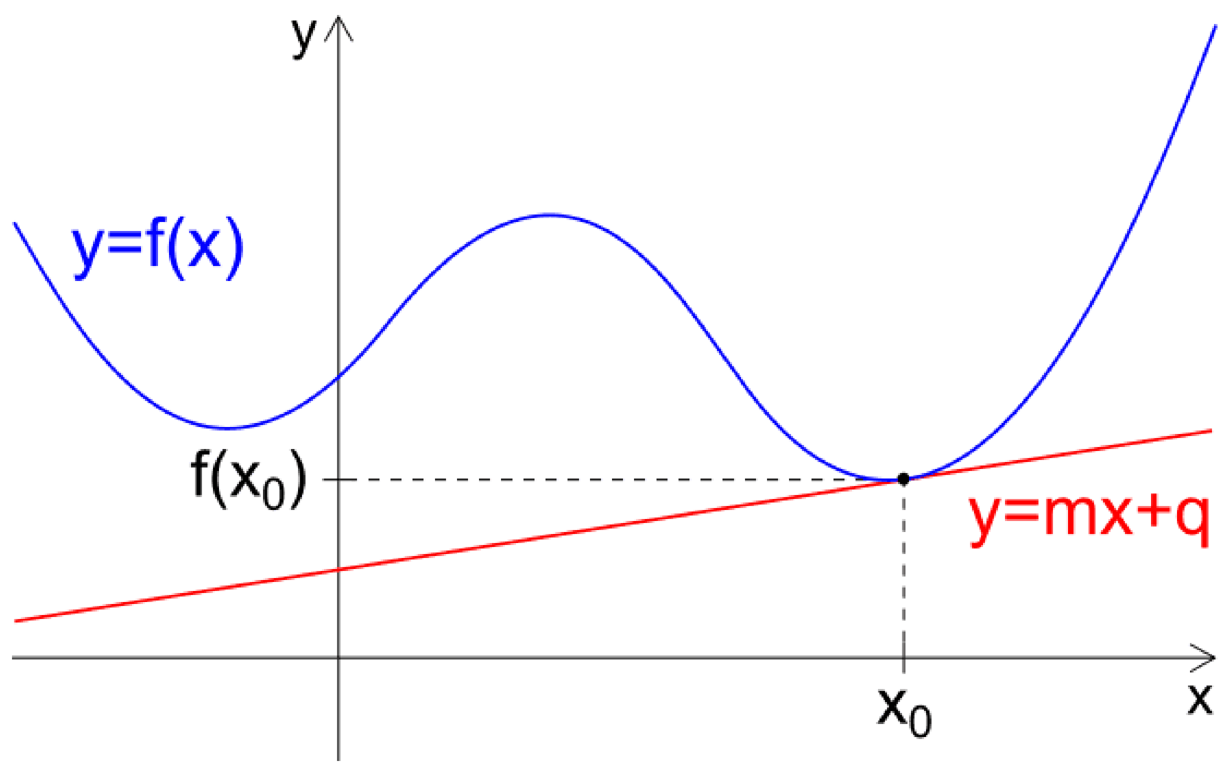
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \cdots$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \cdots}{x} = \frac{1 - \frac{x^2}{3\,!} + \frac{x^4}{5\,!} - \cdots}{1} \xrightarrow[x \,\to\, 0]{} 1$$

Tangente à une courbe

Problème géométrique :

Étant donnés une courbe continue d'équation $y = f(x)$ et un point $(x_0, f(x_0))$ sur la courbe ($x_0 \in \mathbb{R}$), nous cherchons à déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe en ce point $(x_0, f(x_0))$.



Puisque la tangente doit passer par le point $(x_0, f(x_0))$, tout ce que nous avons besoin de connaître est m : la pente de la droite.

Tangente à une courbe

Solution proposée par Newton et Leibniz (*XVIIe siècle*) :

Soit $h \in \mathbb{R}$ une *petite quantité infinitésimale*. Nous cherchons la pente de la droite sécante qui passe par le deux points :

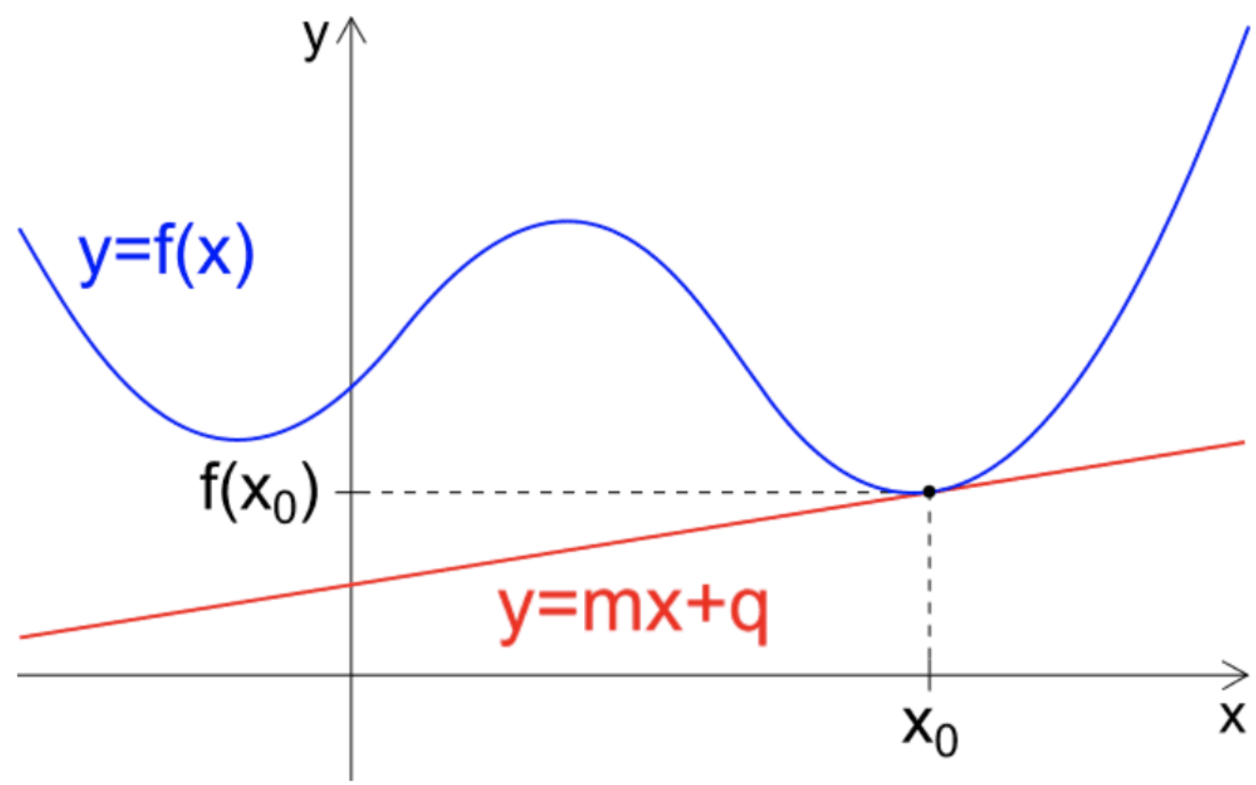
$$(x_0, f(x_0)) \text{ et } (x_0 + h, f(x_0 + h)).$$

La pente de la droite sécante vaut

$$\boldsymbol{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

On définit la **dérivée de la fonction continue** f **en** x_0 comme la limite de la pente des droites sécantes pour h qui tend vers 0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



La dérivée

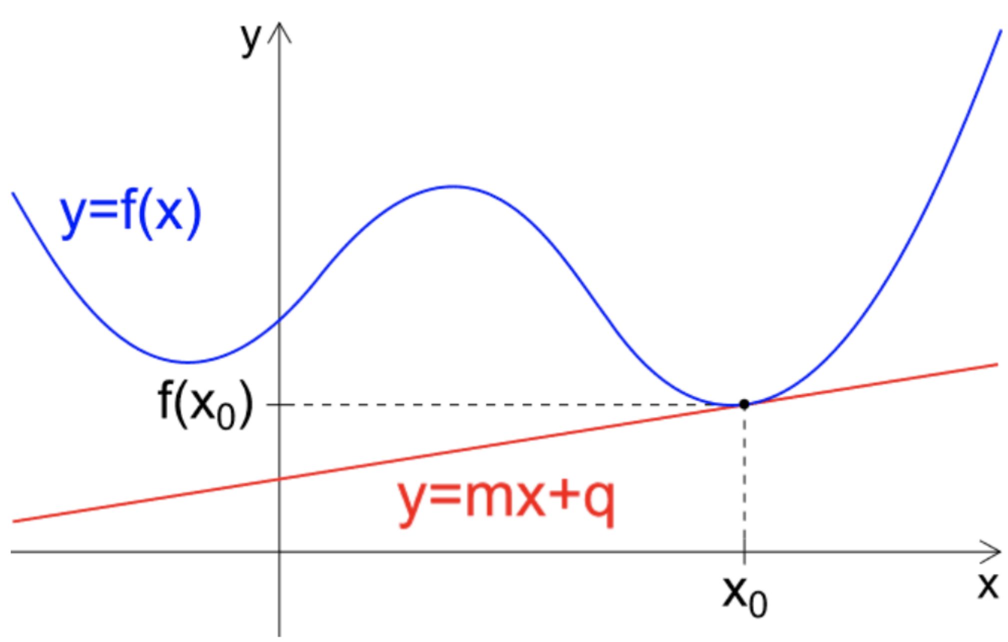
Soit une courbe décrite par une fonction continue $y = f(x)$. **La pente de la droite tangente à la courbe en un point** $(x_0, f(x_0))$ est la limite de la pente de la droite sécante qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, quand $h \in \mathbb{R}^+$ se rapproche de plus en plus de zéro, c'est-à-dire :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

Si cette limite existe, $f'(x_0)$ est appelée la **dérivée** de la fonction f en $x = x_0$ et on dit que **la fonction f est dérivable en $x = x_0$.**

Motivations pour étudier la dérivée première :

- Le calcul de l'angle d'intersection de deux courbes (Descartes).
- La construction de lunettes astronomiques (Galilée) et d'horologes (Huygens)
- La recherche de maxima et minima d'une fonction (Fermat)
- Le calcul de vitesse et de l'accélération d'un mouvement (Galilée, Newton)
- La vérification des lois de gravitation en astronomie (Kepler, Newton)



Premiers exemples

Exemple 1 : pente d'une droite

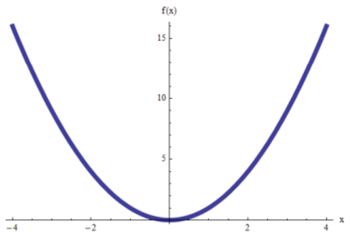
Pour vérifier que la définition précédente est correcte, nous considérons le cas le plus simple possible :

$$f(x) = ax + b \quad où \quad a \in \mathbb{R}^* et \quad b \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire f représente une droite. Nous nous attendons à trouver que la pente de la droite tangente est constante et vaut a. En effet :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x_0+h) + b - (ax_0+b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

Exemple 2 : pente d'une parabole



Considérons une parabole décrite par l'expression $f(x) = x^2$.

Nous nous attendons à trouver que la pente de la droite tangente soit égale à 0 si x_0 est nul et elle doit augmenter au fur et à mesure que l'on s'éloigne de zéro :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

Premiers exemples

Exemple 3 : dérivée de l'exponentielle. Soit $f(x) = e^x$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0}e^{h}-e^{x_0}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} e^{x_0} \frac{e^{h}-1}{h} = e^{x_0}$$

La dernière égalité vient de:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3\,!} \dots\right] - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3\,!} + \cdots}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \cdots\right) = 1$$

Équation de la droite tangente

Solution au problème de la tangente :

Si la dérivée de la fonction continue f en x_0 existe, c'est-à-dire si la limite suivante existe

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

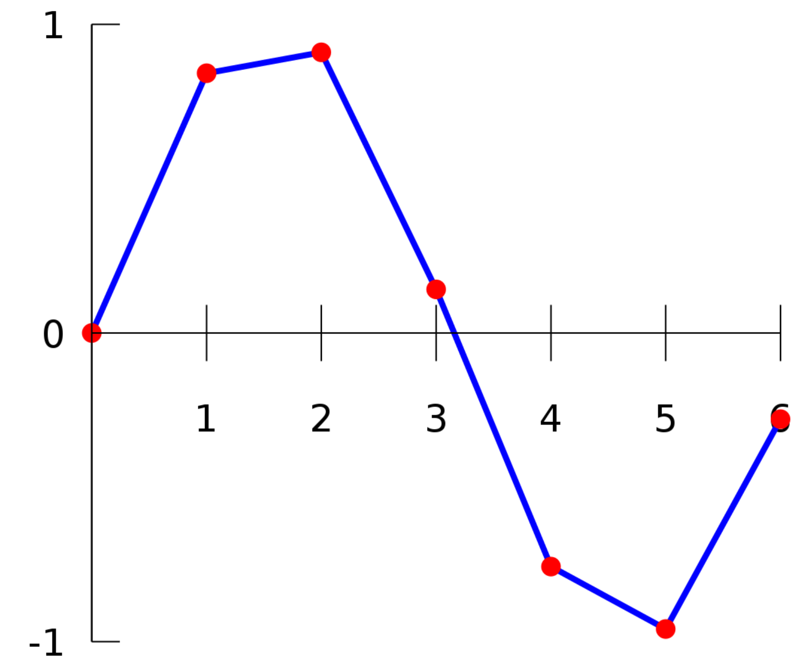
alors la tangente au graphe de la fonction $y = f(x)$ passant par le point $(x_0, f(x_0))$ est bien définie et son équation est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Soit $\mathcal{D}_f$ est le domain de la fonction f. Si pour chaque $x \in \mathcal{D}_f$ la dérivée de la fonction f en x existe on dira que **la fonction f est dérivable en $\mathcal{D}_f$** (ou *smooth* en anglais).

Exemple :

La fonction représentée à droite est un exemple de fonction continue dans l'intervalle $]0,6[$ mais non dérivable dans les points $x = 2,3,4,5$.



Règles de dérivation

Propriétés

Soient f et g deux fonctions dérivables ℝ et $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes réelles. Alors :

a. La dérivée est linéaire:

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$$

b. Dérivée d'un produit (formule de Leibniz) :

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

c. Dérivée d'un quotient :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

En posant $f = g$ dans la formule b on obtient

$$(f^2)'(x) = 2f(x)f'(x)$$

et par récurrence:

d. Dérivée d'une puissance de f :

$$(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

Dérivée d'une composition des fonctions

Soient $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$ deux fonctions, où X, Y, Z sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et h **la fonction composée** de f et de g :

$$h: X \to Z$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Règle de dérivation des fonctions composées (*chain rule*)

Si $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ alors

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot \boldsymbol{f'(x)}$$

Le terme $f'(x)$ est parfois appelé la **<u>dérivée intérieure</u>**

Exemples :

1. $f(x) = ax$ et $g(y) = e^y$ où $a \in \mathbb{R}^*$. Alors $h(x) = g(f(x)) = e^{ax}$ et

$$h'(x) = e^{ax} \cdot a = \boldsymbol{a} \cdot e^{ax}$$

2. $f(x) = \sin(x)$ et $g(y) = y^n$. Alors $h(x) = g(f(x)) = (\sin(x))^n$ et

$$h'(x) = n \cdot (\sin(x))^{n-1} \cdot \mathbf{cos}(\boldsymbol{x})$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Définition

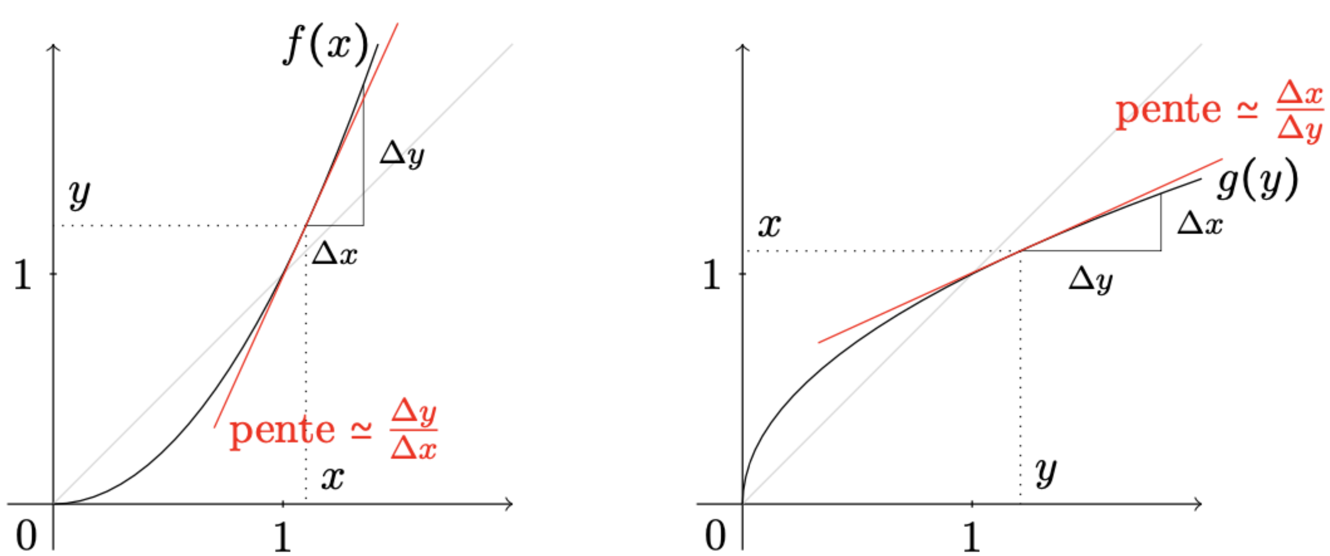
Soient X, Y deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to X$ deux fonctions telles que

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in X \qquad \text{et} \qquad (f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in Y.$$

Dans ce cas on écrit $g = f^{-1}$ et on dit que g est la **fonction réciproque** de f.

Exemples :

1. $f(x) = x^n$ et $g(y) = \sqrt[n]{y}$ pour $x, y \in \mathbb{R}^+$.
2. $f(x) = \cos(x)$ et $g(y) = \arccos(y)$ pour $x \in [0, \pi[$ et $y \in]-1,1]$.
3. $f(x) = e^x$ et $g(y) = \ln(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}^+$.



Règle de dérivation des fonctions réciproques

Si f est dérivable en $g(y)$, alors g est dérivable en y et

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Dérivée de e^x et de $ln(x)$

On a vu que la dérivée de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est égale à elle-même :

$$f'(x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En appliquant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque on trouve la dérivée de

$$g(y) = \ln(y)$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{e^{lny}} = \frac{1}{y}$$

On vient donc de démontrer que $\ln(x)$ est bien la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$

Dérivées des fonctions trigonométriques

Les dérivées des trois principales fonctions trigonométriques sont :

1. $(\sin(x))' = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $(\cos(x))' = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Les dérivées des trois principales fonctions trigonométriques réciproques sont :

4. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$
5. $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$
6. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dérivée des fonctions hyperboliques

La dérivée de la fonction sinus hyperbolique est égale au cosinus hyperbolique :

$$(\sinh(x))' = \cosh(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La dérivée de la fonction cosinus hyperbolique est égale au sinus hyperbolique :

$$(\cosh(x))' = \sinh(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La dérivée de la fonction tangente hyperbolique est égale à l'inverse du carré du cosinus hyperbolique :

$$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ces formules sont très similaires à celles des dérivées des fonctions trigonométriques à ceci près qu'elles sont symétriques pour le sinh et le cosh. Il n'y a pas ici le problème de savoir où est le signe (-) !!

Ce que l'on gagne ici en simplicité, on l'a perdu dans la relation

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

qui est le pendant de la formule

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Dérivées de quelques fonctions

La dérivée de la fonction exponentielle $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ $(a > 0)$. On met f sous la forme $f(x) = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$

$$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dérivée de la fonction $\boldsymbol{f(x) = x^q}$ avec $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Alors $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ est équivalent à $[f(x)]^n = x^m$

En dérivant des 2 côtés on obtient:

$$n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) = m x^{m-1}$$

ce qui donne

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{f(x)^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{(x^q)^{n-1}} = q \cdot \frac{x^{m-1}}{x^{m-m/n}} = q \cdot x^{m-1-m+m/n} = q \cdot x^{\frac{m}{n}-1} = \boldsymbol{q \cdot x^{q-1}}$$

Dérivées de quelques fonctions

Dérivée de la fonction

$$f(x) = x^{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad x > 0$$

On met f sous la forme $f(x) = \left(e^{\ln x}\right)^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$

Alors

$$f'(x) = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha\, ln\, x} \cdot \left(\frac{\alpha}{x}\right) = x^{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{x}\right) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

Règle de l'Hospital

Pour lever une indétermination dans une limite **du type** $\frac{0}{0}$ **ou** $\frac{\infty}{\infty}$ on peut utiliser la **règle de l'Hospital** qui dit que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si la seconde limite existe !

Exemples:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1/x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{n}x^{-n} = 0 \text{ pour tout } n > 0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{6x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{6}{e^x} = 0$$

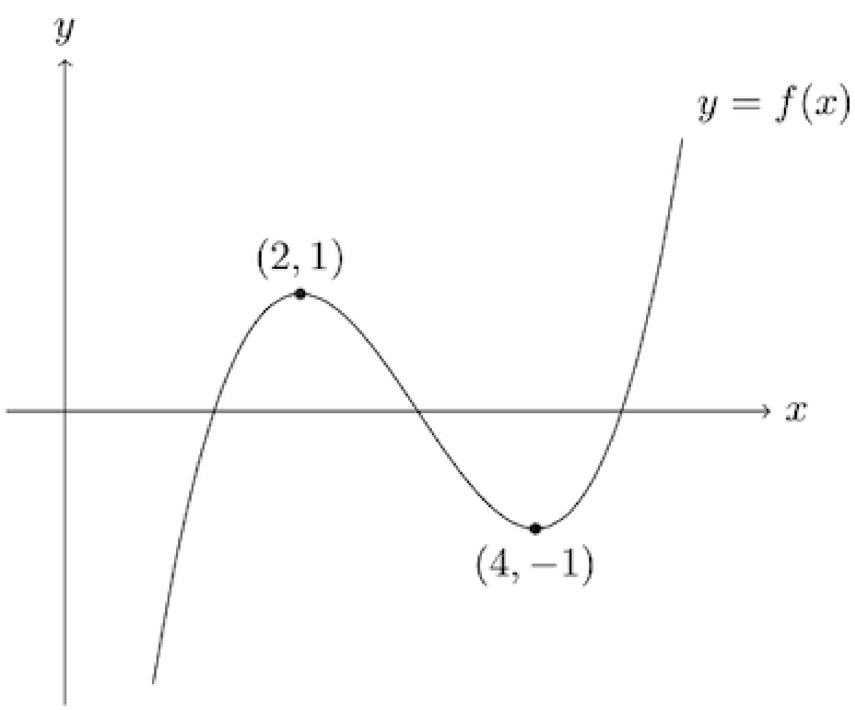
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to +\infty}\frac{n!}{e^x} = 0$$

Dérivée et monotonie

Fonction croissante ou décroissante ?

La dérivée de la fonction continue $f(x)$ donne la pente de la tangente à la courbe représentée par l'expression $y = f(x)$. Étant donné un intervalle $]a,b[\subset \mathbb{R}$ nous déclarons que :

1. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est **croissante** sur $]a,b[$.
2. Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est **décroissante** sur $]a,b[$.
3. Si $f'(x_0) = 0$ alors f a un **point stationnaire** en x_0.



Exemple :

$f'(x) > 0$ dans l'intervalle $]-\infty, 2[$

$f'(x) = 0$ en $x = 2$

$f'(x) < 0$ dans l'intervalle $]2,4[$

$f'(x) = 0$ en $x = 4$

$f'(x) > 0$ dans l'intervalle $]4, +\infty[$

Tableau de croissance d’une fonction

Limite indéterminées

Les limites de la forme suivante sont *apriori* indéterminées.

A. $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0 \cdot \infty$

B. ∞^0 1^∞ 0^0

C. $\infty - \infty$ $-\infty + \infty$

Il faut lever l'indétermination par une méthode ou une autre.

- Pour le type A nous utiliserons la **règle de l'Hôpital** ou les **développements limités**.
- Pour le type B, nous appliquerons **la fonction *ln*** à l'expression ce qui nous ramène à une forme de type A (voir slide 31)
- Le type C se résout souvent en multipliant l'expression par le «conjugué» (voir slide 32).

Limite de type B

Pour résoudre une limite indéterminée de la forme suivante

$$\infty^0 \qquad\qquad 1^\infty \qquad\qquad 0^0$$

on procède en 3 étapes:

1. On applique la **fonction *ln*** à l'expression ce qui nous ramène à une **indétermination de type A**.
2. On lève l'indétermination de type A à l'aide de la **règle de l'Hospital** ou **d'un développement limité** : on trouve une limite L
3. On **reprend l'exponentielle** pour trouver la limite e^L

Exemple:

Indétermination de type C

Calculer

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x+5}-x$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x+5}-x = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x+5}+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+5-x^2}{\sqrt{x^2+3x+5}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+3x+5}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\left(3+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\left(3+\frac{5}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\left(3+\frac{5}{x}\right)}{x\cdot\left[\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+1\right]} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+1} = \frac{3}{2}$$