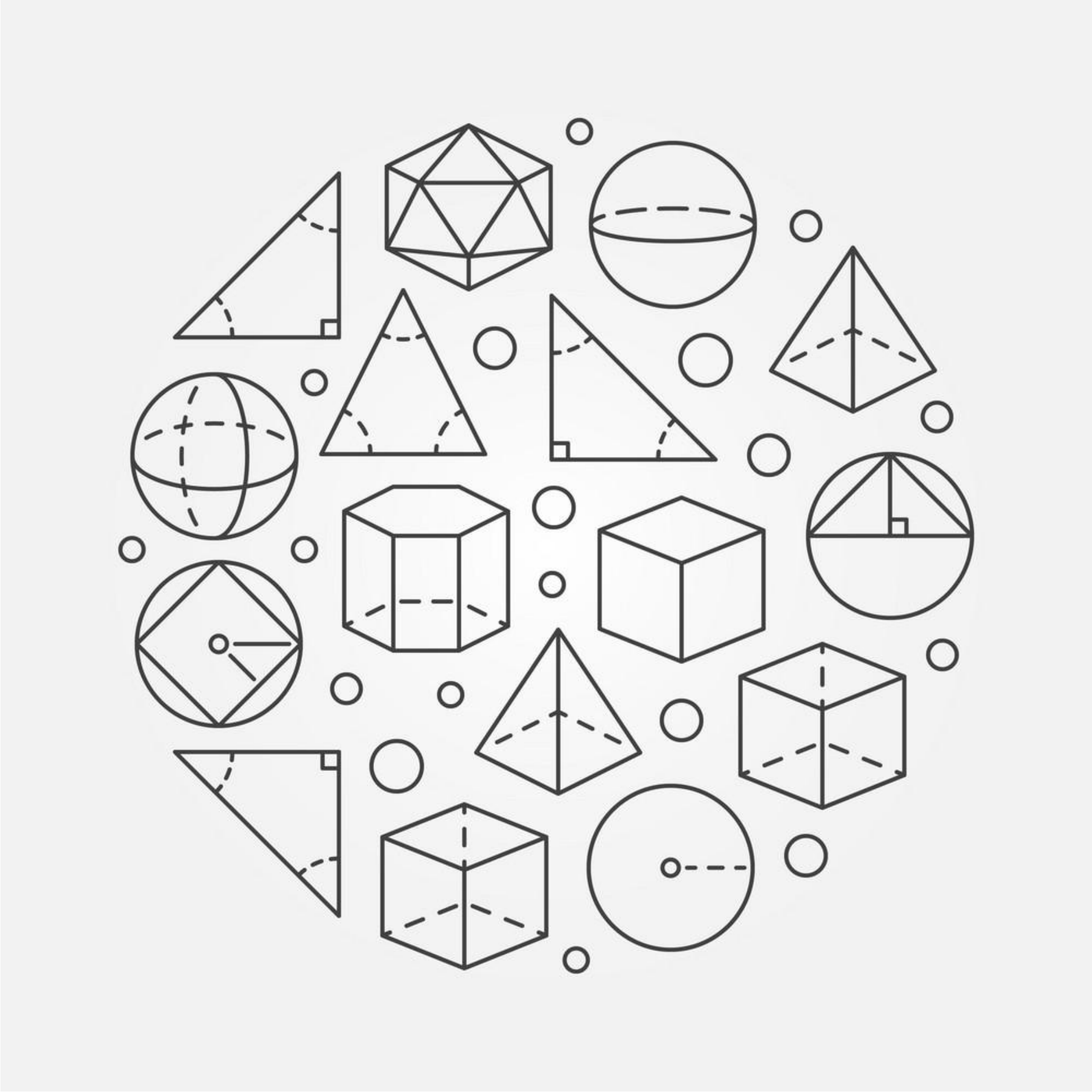


Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Géométrie vectorielle

Philippe Chabloz

Scalaires et vecteurs

Certaines quantités mesurables ne comportent qu'une grandeur et sont entièrement définies par un nombre avec ou sans l'unité de mesure appropriée (température, volume, masse, potentiel électrique, etc…). Ces quantités s'appellent **scalaires**.

Un **vecteur** est un segment de droite orienté possédant les caractéristiques suivantes.

1. Une origine : point de départ du segment.
2. Une extrémité : point d'arrivée du segment, où nous trouvons une pointe de flèche.
3. Une direction : donnée par une droite supportant le segment.
4. Un sens : de l'origine vers l'extrémité.
5. Une norme : distance entre l'origine et l'extrémité du segment.

Notations :

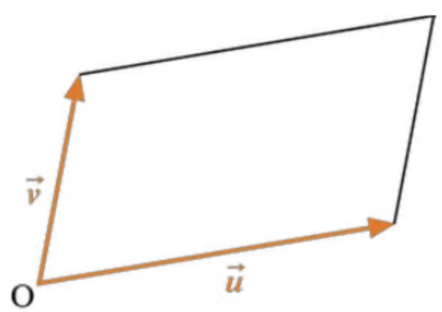
- On note généralement un vecteur par une seule lettre surmontée d'une flèche ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) ou encore par deux lettres majuscules surmontées d'une flèche ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{OD}$). Dans ce dernier cas, la première lettre représente l'origine et la seconde l'extrémité.
- Le *vecteur nul*, noté $\vec{0}$, est le vecteur dont l'origine et l'extrémité coïncident.
- La *norme du vecteur* $\vec{u}$ est notée $\| \vec{u} \|$. Si $\| \vec{u} \| = 1$ le vecteur $\vec{u}$ est appelé *vecteur unitaire*.

Addition vectorielle

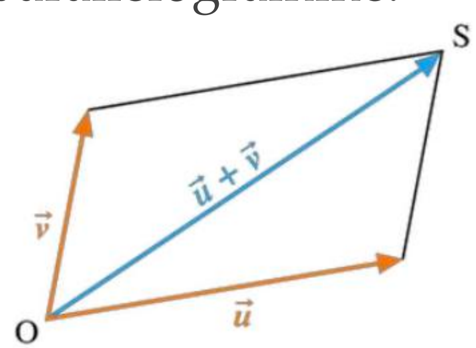
L'addition des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donne un vecteur appelé vecteur résultant ou résultante. Ce vecteur est obtenu en utilisant une des deux méthodes suivantes.

Méthode du parallélogramme

- Faire coïncider les origines des deux vecteurs en un point et compléter le parallélogramme engendré par les deux vecteurs.



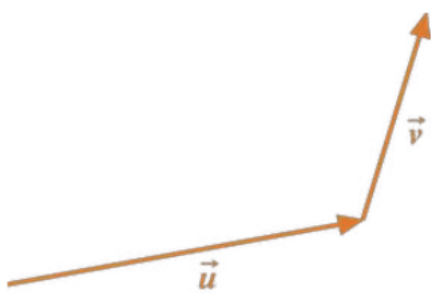
- Tracer la diagonale reliant O au sommet opposé S du parallélogramme.



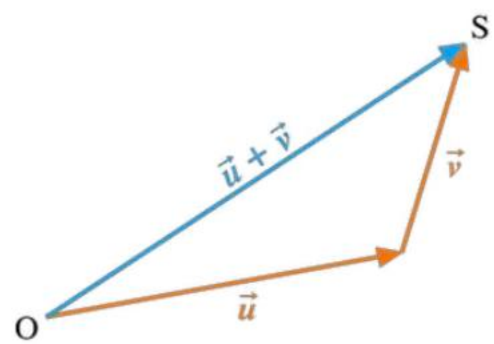
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OS}$$

Méthode du triangle

- Faire coïncider l'origine de $\vec{v}$ avec l'extrémité de $\vec{u}$.



- Compléter le triangle engendré par les deux vecteurs.



$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OS}$$

Propriétés de l'addition de vecteurs

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, alors :

1. **fermeture** : $\vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur
2. **commutativité** : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. **Associativité** : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. **Élément neutre** : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

Relation de Chasles :

Si A, B et C désignent trois points, alors

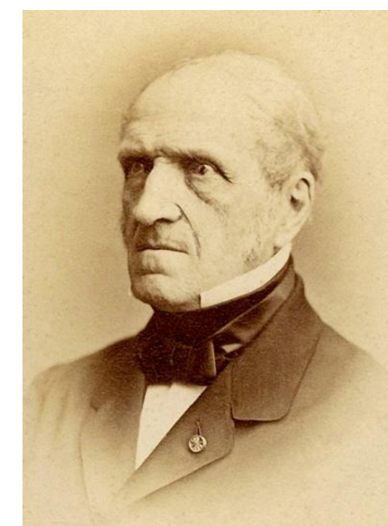
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Conséquences :

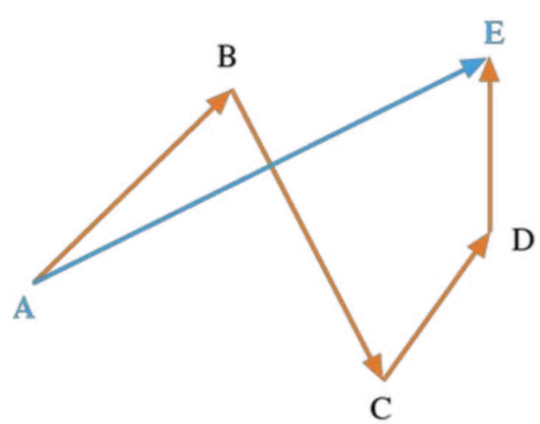
1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \cdots + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AR}$

2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

3. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



Michel Chasles
1793 - 1880



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

Multiplication par un scalaire

Le résultat de la **multiplication d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$, est le vecteur, noté $\lambda\vec{v}$, ayant les caractéristiques suivantes :

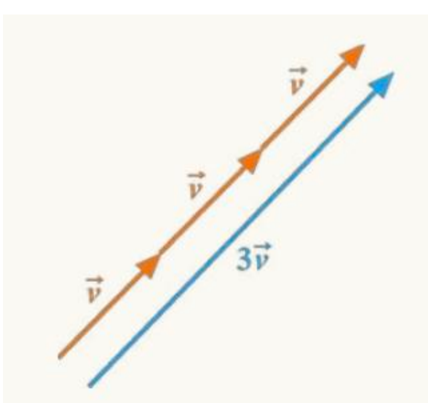
- lorsque $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\lambda \neq 0$,

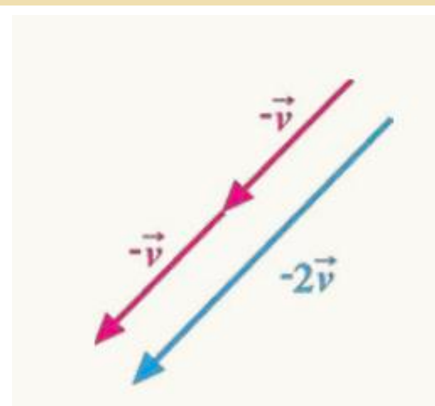
  a) la **direction de $\lambda\vec{v}$** est la même que celle de $\vec{v}$;

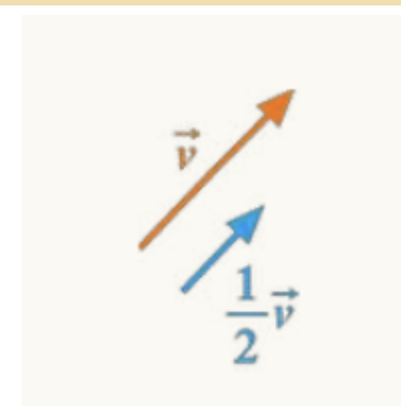
  b) le **sens de $\lambda\vec{v}$** est le **même** que celui de $\vec{v}$ **lorsque $\lambda > 0$** et
  le **sens de $\lambda\vec{v}$** est l'**opposé** de celui de $\vec{v}$ lorsque $\lambda < 0$;

  c) $\| \lambda\vec{v} \| = |\lambda| \, \| \vec{v} \|$;

- lorsque $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\lambda = 0$, alors $\lambda\vec{v} = \vec{0}$







Les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$, munis de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un scalaire, ont une structure d'**espaces vectoriels réels.**

Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, et a et b des scalaires alors :

1. $1\vec{u} = \vec{u}$
2. $a\vec{0} = \vec{0}$
3. $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$
4. $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
5. $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
6. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est unitaire

- Soient $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}$ une famille de vecteurs. Nous dirons qu'un vecteur $\vec{v}$ est une combinaison linéaire des $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}$ s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tels que

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{v_i}$$

- $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}$ est appelée une famille génératrice si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut se représenter comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}$.

Base de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

- Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, … , $\overrightarrow{v_k}$ sont **linéairement dépendants** s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ **non tous nuls** tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{v_i} = \vec{0}$$

  Ceci signifie que **l'un des vecteurs au moins peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs**.

- Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, … , $\overrightarrow{v_k}$ sont **linéairement indépendants** si la seule manière d'obtenir $\vec{0}$ comme combinaison linéaire des $\overrightarrow{v_i}$ est d'imposer à tous les coefficients d'être nuls :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{v_i} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_k = 0$$

  Ceci signifie que la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls. **Aucun des vecteurs $\overrightarrow{v_i}$ ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres $\overrightarrow{v_j}$**

- Une **base de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$** est une famille $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ qui est

1. Une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$
2. Une famille de vecteurs linéairement indépendants

Bases des espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

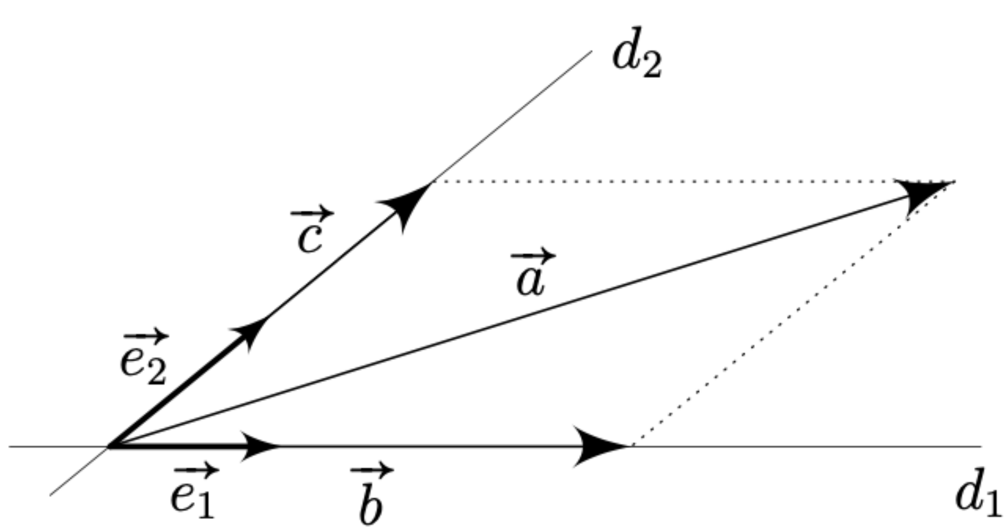
- *Remarques* :

  a. Deux vecteurs dans le plan, colinéaires et non nuls ont la même direction.

  b. Deux vecteurs dans le plan sont linéairement dépendant si et seulement s'ils sont colinéaires.

  c. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

- Deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ du plan $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas colinéaires forment, dans cet ordre, une **base de** $\mathbb{R}^2$.



- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans l'espace sont **coplanaires** s'il existe deux nombres réels λ_1 et λ_2 tel que

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$$

- *Remarques :*

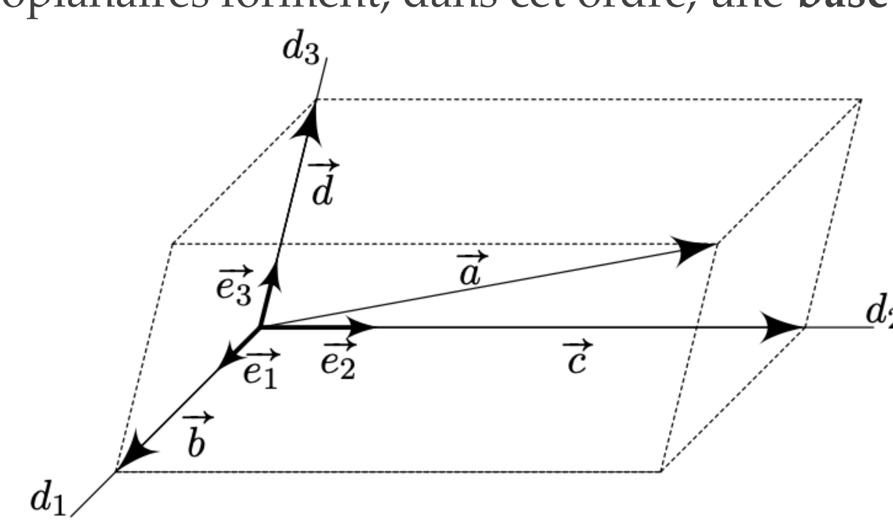
  a. Trois vecteurs dans l'espace, coplanaires et non nuls appartiennent au même plan ;

  b. Trois vecteurs dans l'espace sont linéairement dépendant si et seulement s'ils sont coplanaires ;

  c. Deux vecteurs dans l'espace sont toujours coplanaires.

  d. Trois vecteurs, dont deux sont colinéaires, sont toujours coplanaires.

- Trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas coplanaires forment, dans cet ordre, une **base de** $\mathbb{R}^3$.

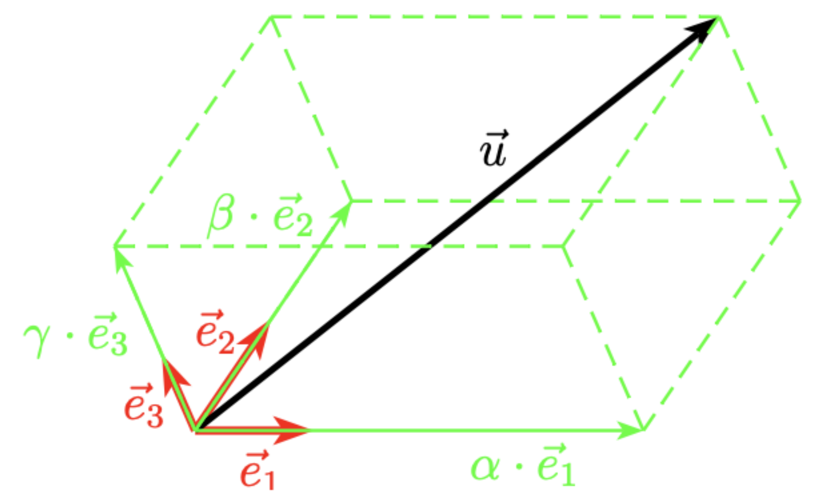


Composantes d'un vecteur dans $\mathbb{R}^3$

- La famille $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Elle est appelée la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.
- Pour chaque vecteur de l'espace $\mathbb{R}^3$, les nombres réels α, β et γ tels que

$$\vec{u} = \alpha\,\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$$

s'appellent les **composantes du vecteur $\vec{u}$ relativement à la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.**



- **Attention : les composantes dépendent étroitement de la base utilisée !**
- **Mais pour une base fixée, les composantes d'un vecteur sont uniques !**

Pour dénoter un vecteur, on privilégie la notation colonne ou en ligne :

$$\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = \alpha\,\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3}$$

Opérations sur les composantes

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs donnés par leurs composantes. Alors :

$$\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Repères et coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

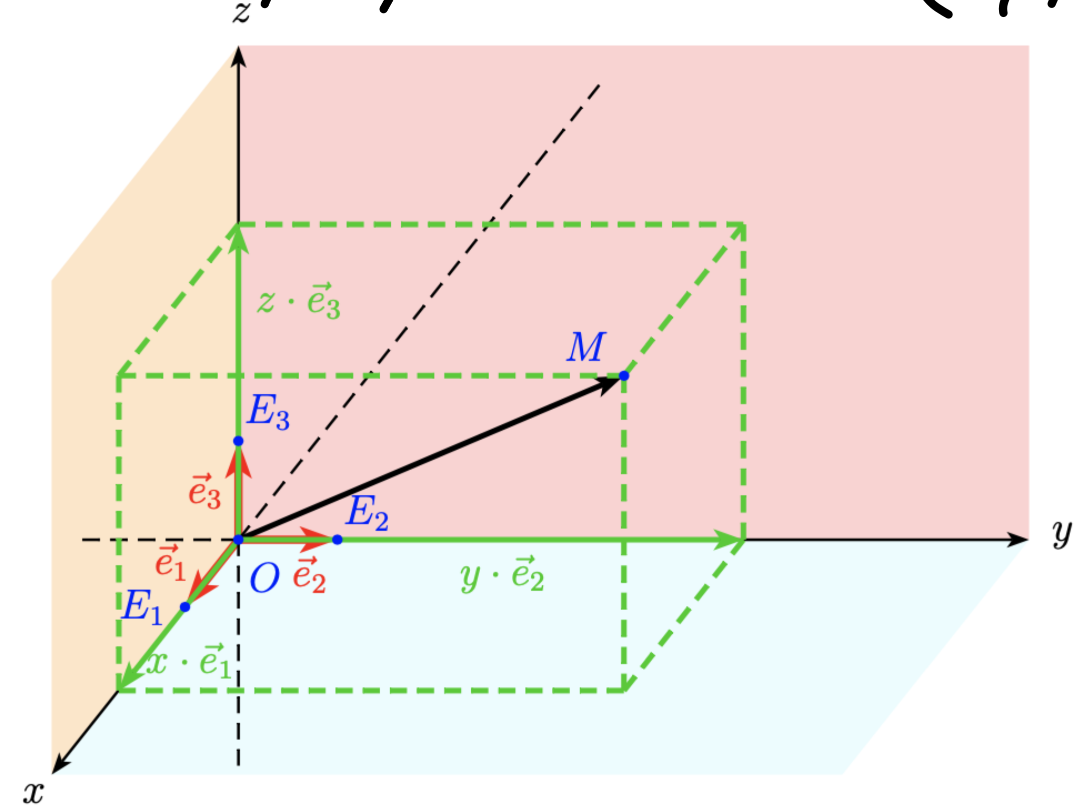
$P(1,2,3)$
$Q(2,4,7)$ $\quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

- Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de l'espace $\mathbb{R}^3$.
- Nous complétons la base $\mathcal{B}$ en ajoutant un point O appelé **origine**, nous appelons $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ un **repère de l'espace $\mathbb{R}^3$.**
- Les **coordonnées x, y et z d'un point** M de $\mathbb{R}^3$ relativement au repère $\mathcal{R}$ sont par définition les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base associée au repère.

$$M = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3}$$

- Le **plan** xOy, est l'ensemble de points :

$$\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = 0\}.$$



Il contient l'axe Ox et l'axe Oy. Il est représenté en bleu ci-contre. De même, nous définissons **les plans xOz et yOz** qui sont représentés en orange et en rouge respectivement ci-contre.

Opération sur les coordonnées

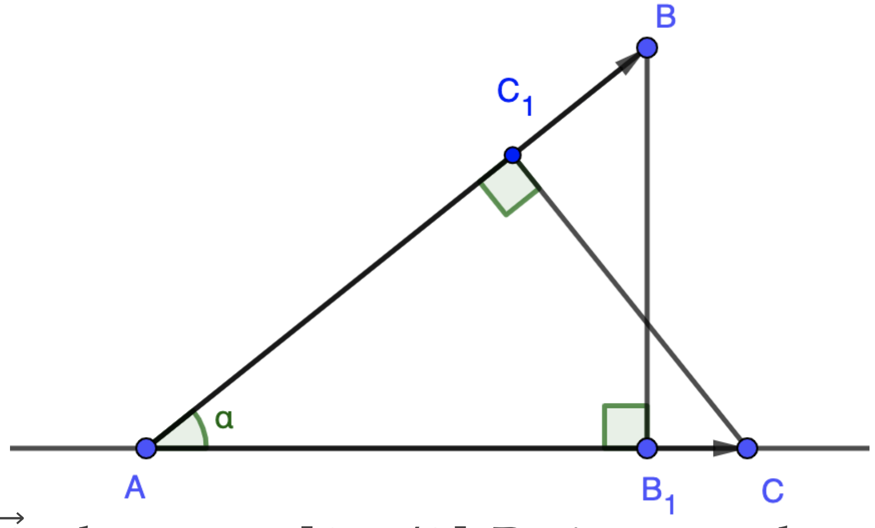
Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace $\mathbb{R}^3$. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (relation de Chasles) on peut écrire

$$\overrightarrow{AB} = (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Produit scalaire

défini dans $\mathbb{R}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Nous allons définir un **produit d'un vecteur par un autre vecteur**, mais le résultat de ce produit *ne sera pas un vecteur* : ce sera un scalaire !



- Considérons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $\alpha \in]0, \pi/2[$. Projetons orthogonalement B sur la droite AC, en B_1, et C sur la droite AB, en C_1.
- Les triangles ABB_1 et ACC_1 sont semblables, car ils ont deux (et donc trois) angles respectivement égaux. Donc

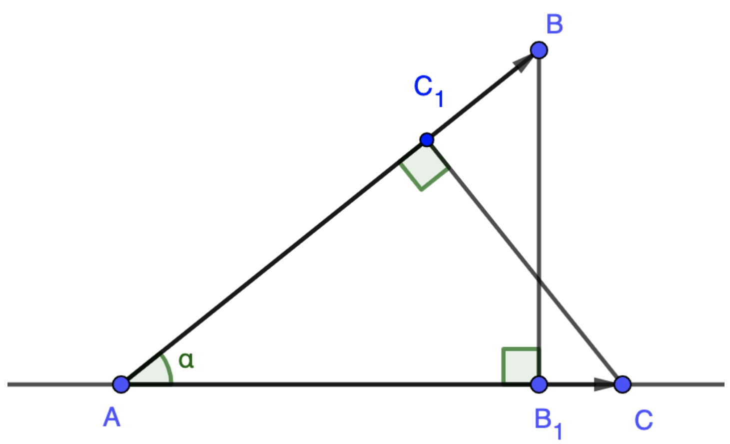
$$\frac{\| \overrightarrow{AB} \|}{\| \overrightarrow{AC} \|} = \frac{\| \overrightarrow{AB_1} \|}{\| \overrightarrow{AC_1} \|}$$

et par la suite $\| \overrightarrow{AB} \| \| \cdot \| \overrightarrow{AC_1} \| = \| \overrightarrow{AC} \| \cdot \| \overrightarrow{AB_1} \|$.

Si $\alpha \in]0, \pi/2[$, le **produit scalaire de deux vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, est donnée par

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \| \overrightarrow{AB} \| \cdot \| \overrightarrow{AC_1} \| = \| \overrightarrow{AC} \| \cdot \| \overrightarrow{AB_1} \|$$

Produit scalaire et angle entre deux vecteurs



Dans le cas du triangle rectangle AB_1B on a que $\cos(\alpha) = \dfrac{\| \overrightarrow{AB_1} \|}{\| \overrightarrow{AB} \|}$

Le produit scalaire **de deux vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est donc

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \| \overrightarrow{AB} \| \cdot \| \overrightarrow{AC} \| \cdot \cos \alpha}$$

Le **produit scalaire de deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \cos \alpha$$

où α est l'angle déterminé par les vecteurs et $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriétés du produit scalaire

Quels que soient les vecteurs, et le scalaire a, on a :

1. **Commutativité** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. **Linéarité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$
3. **Norme** : $\| \vec{\boldsymbol{u}} \|^2 = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$

Applications du produit scalaire

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire est égal à zéro :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Remarques :

a. Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.

b. Le produit scalaire de deux vecteurs peut être nul, sans que l'un des vecteurs soit nul.

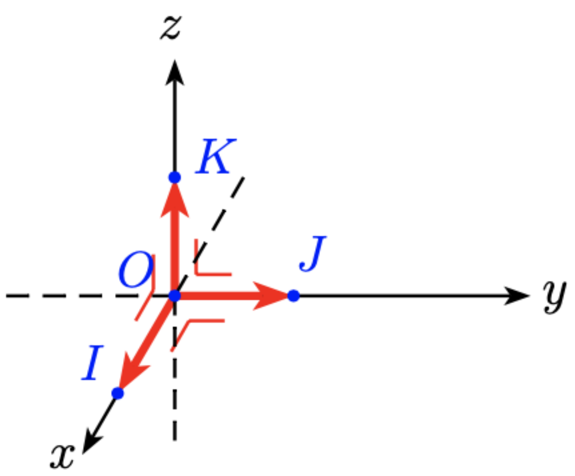
c. Si le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

L'angle α entre deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par :

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\| \vec{u} \| \| \vec{v} \|}\right)$$

Base orthonormée

- Une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ est dite **orthonormée** si
  1. $\| \overrightarrow{e_1} \| = \| \overrightarrow{e_2} \| = \| \overrightarrow{e_3} \| = 1$
  2. $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_3} = 0$
- Un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$est dit **orthonormé** si la base associée au repère est orthonormée.



Remarques **:**

a. Dans une base orthonormée, les vecteurs de cette base sont orthogonaux deux à deux et unitaires (de norme 1).

b. Dans la suite du cours, sans mention contraire, on considérera toujours les bases comme étant orthonormées et les repères comme étant également orthonormés.

Conséquences

Expression analytique du produit scalaire et de la norme :

On considère les vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ donnés en composantes **dans une base orthonormée** $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

1. Le produit scalaire des vecteurs et est le nombre réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

2. La norme du vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel positif :

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Remarque:

- **Si la base n'est pas orthonormée, ces formules sont fausses !!**

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + (-4) \cdot 5 = 2 - 9 - 20 = -27$$

Projection orthogonale

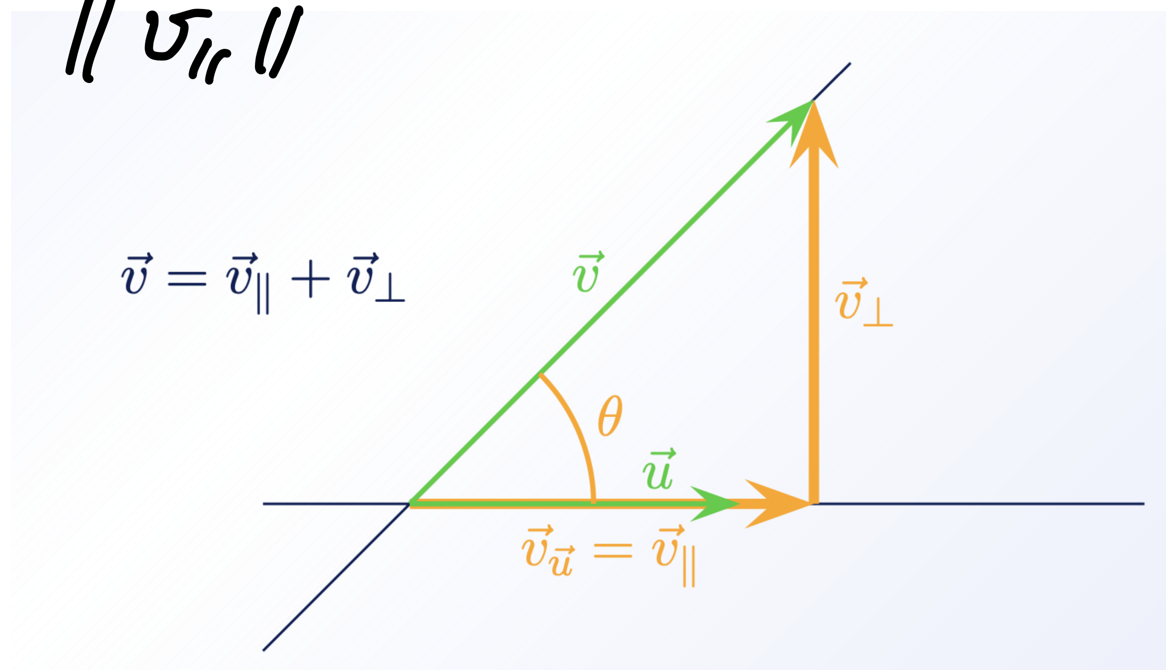
La projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$, notée $\mathrm{Proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$ ou $\vec{v}_{\vec{u}}$, est donnée par

$$\mathrm{Proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{v}_{\|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\ \vec{u}\ \|^2}\cdot\vec{u} = \underbrace{\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\ \vec{u}\ \|}}_{\|\vec{v}_{\|}\|}\frac{\vec{u}}{\|\ \vec{u}\ \|}$$

vecteur unitaire

Quant à la longueur de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$ elle, est égale à

$$|\mathrm{Proj}_{\vec{u}}(\vec{v})| = \|\vec{v}_{\|}\| = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{u}|}{\|\ \vec{u}\ \|}$$



Dans le plan, la longueur de $\vec{v}_{\perp}$ est égale à

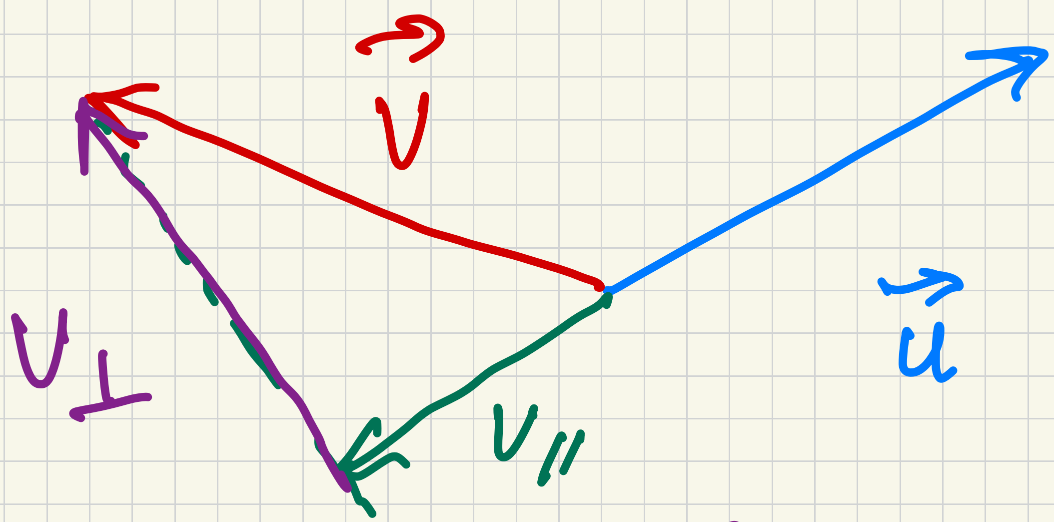
$$\|\vec{v}_{\perp}\| = \frac{|\det(\vec{u},\vec{v})|}{\|\ \vec{u}\ \|} = \frac{1}{\|\ \vec{u}\ \|}\cdot\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \frac{|u_1v_2 - u_2v_1|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}$$

Exemple

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 7 = -5$$

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} = \frac{-5}{4+9+1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{5}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{5}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 66 \\ -13 \\ 93 \end{pmatrix}$$

Produit vectoriel

défini uniquement dans $\mathbb{R}^3$

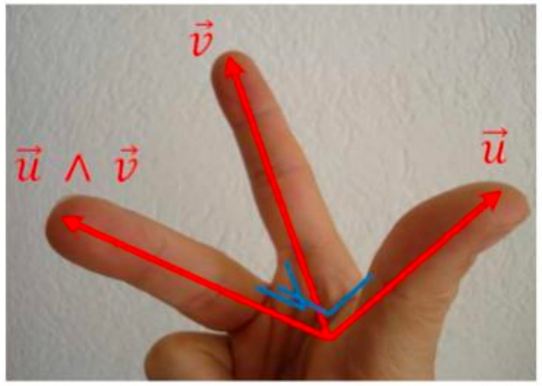
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **deux vecteurs de** $\mathbb{R}^3$ formant un angle φ. Par définition, le **produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est le vecteur noté $\vec{u} \times \vec{v}$ ou $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (lire $\vec{u}$ *cross* $\vec{v}$) tel que :

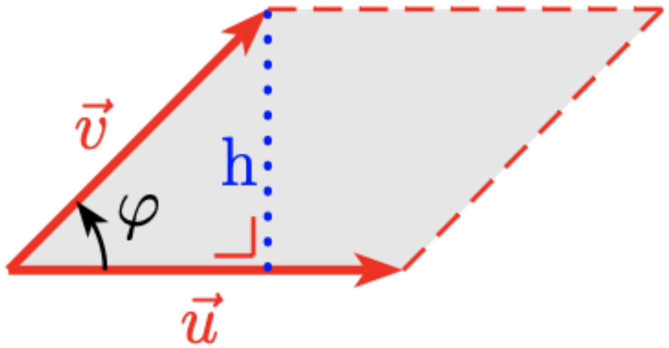
1. la **direction** de $\vec{u} \times \vec{v}$ est **orthogonale aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** ;
2. le **sens** de $\vec{u} \times \vec{v}$ donne au triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ une **orientation directe**: cette orientation est donnée par la "*règle du tire-bouchon*" ou par la "*règle des trois doigts de la **main droite***" (pouce, index, majeur), illustrée ci-contre.
3. la **norme** de $\vec{u} \times \vec{v}$ est égale à **l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$** :

$$\| \vec{u} \times \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \cdot \sin(\varphi)$$

avec $\varphi \in [0; \pi]$

base : $\| \vec{u} \|$, hauteur : $h = \| \vec{v} \| \sin(\varphi)$





$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix} \text{ ou}$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \geq 0$$

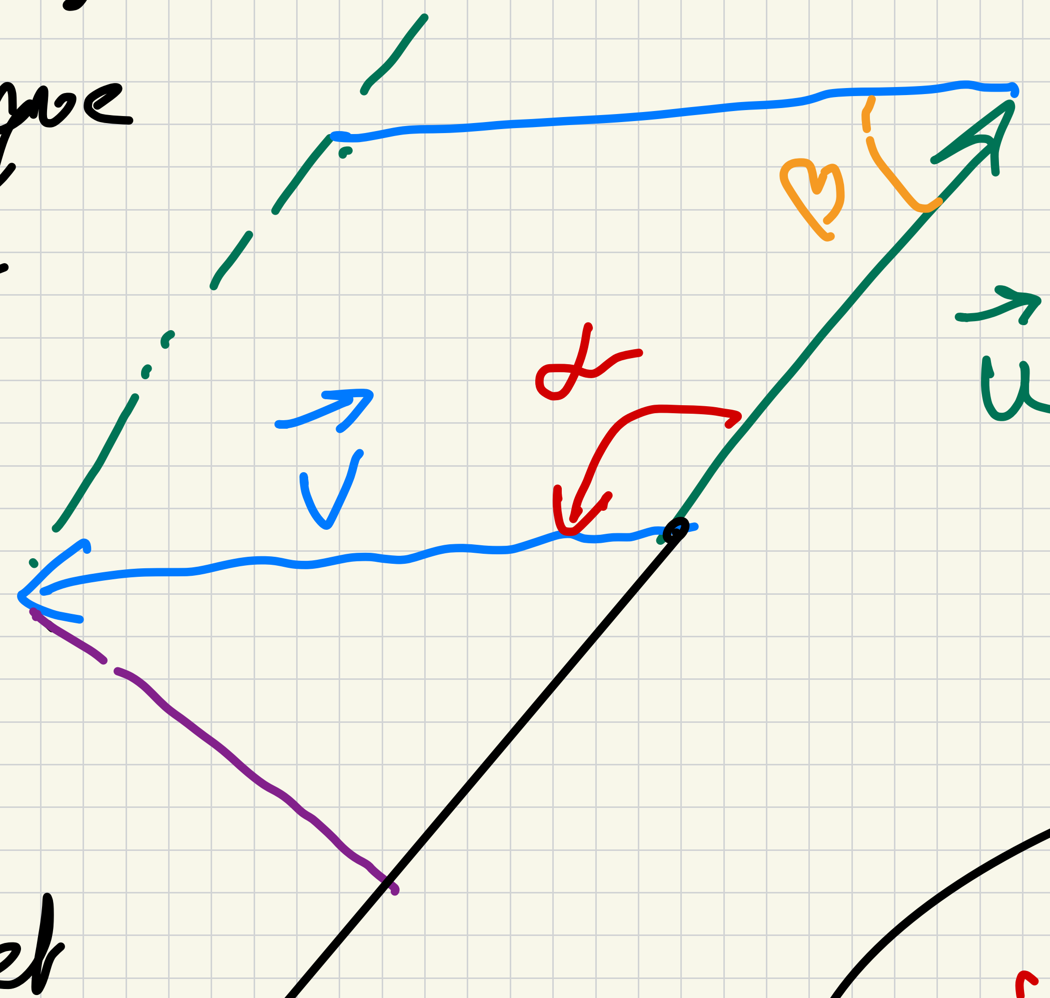
Pour calculer l'angle entre 2 vecteurs utiliser le produit scalaire

Exemple où le produit vectoriel donnerait (via le sinus) l'angle β alors que l'on veut α !!

$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) < 0$$

$$\Rightarrow \alpha \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$$



MAIS $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ tjs ≥ 0

Le produit scalaire est < 0 et donc le $\cos(\alpha)$ aussi !!

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)$$

Propriétés du produit vectoriel

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ et le nombre réel λ, on a :

1. **Anticommutativité** : $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$. Ainsi $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
2. **Bilinéarité** : $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$
3. **Produit par un nombre réel** : $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$ et $\vec{u} \times (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$
4. **Identité de Lagrange** : $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$
5. **Colinéarité** : $\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Expression analytique du produit vectoriel :

On considère les vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ donnés en composantes dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & u_1 & v_1 \\ \vec{j} & u_2 & v_2 \\ \vec{k} & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

Pour le calcul de $\vec{u} \times \vec{v}$, on peut utiliser (par abus de notation) le pseudo-déterminant ci-dessus.

Exemple : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 2 & -4 \\ \vec{e}_2 & 3 & 6 \\ \vec{e}_3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 6 \cdot 1 \\ -(5 \cdot 2 - 1 \cdot (-4)) \\ 6 \cdot 2 - 3(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -14 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 9 \cdot 2 + 3(-14) + 1 \cdot 24 = 0$$

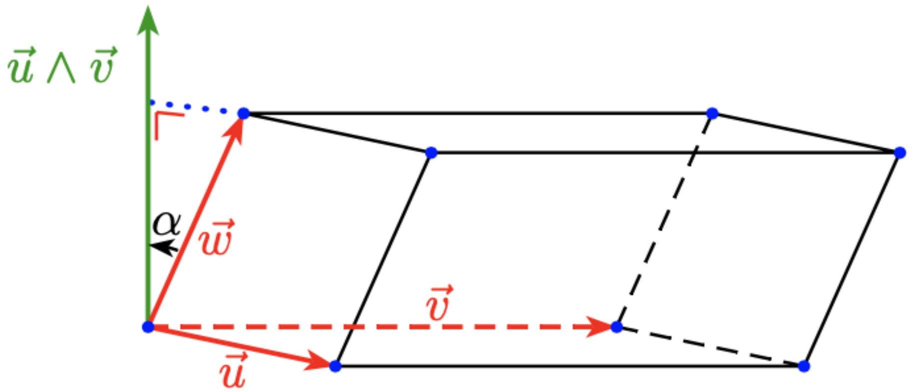
$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 9(-4) + 6(-14) + 5 \cdot 24 = 0$$

Produit mixte

Nous allons définir une troisième notion, produit entre *trois* vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont le résultat est *un scalaire* !

On appelle **produit mixte de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de** $\mathbb{R}^3$ pris **dans cet ordre**, le nombre réel, noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, défini par la formule :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$



Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ et le nombre réel λ, on a :

1. Le produit mixte est **invariant** par une **permutation circulaire** de ses vecteurs :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

2. Le produit mixte change de signe quand on **permute deux vecteurs** :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[w, \vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$$

3. Linéarité du produit mixte:

$$[\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda\, [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \qquad [\vec{u} + \vec{z}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{z}, \vec{v}, \vec{w}]$$

4. **Le produit mixte est égal au volume (avec signe) du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.** Si le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ a une **orientation directe**, le **signe sera positif** ; **sinon il sera négatif**.

Déterminants

Déterminant 2 x 2

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Le déterminant est signé : il peut être positif ou négatif.

Il est nul si les vecteurs (a, b,) sont colinéaires

Il est positif si les vecteurs (a, b) forment une base directe (comme (e_1, e_2))

Il est négatif si les vecteurs (a, b) forment une base indirecte (comme $(e_1, -e_2)$ ou (e_2, e_1))

Déterminant 3 x 3

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Le déterminant est signé : il peut être positif ou négatif.

Il est nul si les vecteurs (a, b, c) sont coplanaires

Il est positif si les vecteurs (a, b, c) forment une base directe (règle des trois doigts de la main droite)

Il est négatif si les vecteurs (a, b, c) forment une base indirecte

$$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{e_2}, \vec{e_1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$\det(\vec{e_1}\ \vec{e_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

(e_1, e_2) forme une base directe de $\mathbb{R}^2$

(e_2, e_1) " " base indirecte de $\mathbb{R}^2$

Produit mixte

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Alors le produit mixte $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ est égal au déterminant $\mathbf{det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = |\vec{u},\vec{v},\vec{w}| = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1\cdot\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\cdot\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\cdot\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$u_1\cdot(v_2w_3 - v_3w_2) - u_2\cdot(v_1w_3 - v_3w_1) + u_3\cdot(v_1w_2 - v_2w_1)$$

$$= \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$\det(\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w})$ = volume orienté du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ 2 vecteurs du plan

$\det(\vec{u}, \vec{v})$ = Aire (orientée) du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Exemple

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-7) + (-7) + 3 \cdot 14 = \underline{\underline{21}} > 0$$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base <u>directe</u>

Exemple

Soient les vecteurs $\vec{u} = (1, -3{,}5)$, $\vec{v} = (-2{,}4{,}3)$ et $\vec{w} = (3{,}1{,}3)$ donnés en composantes dans une base orthonormée directe.

- **Produit scalaire** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 - 12 + 15 = 1$$

Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, les vecteurs et ne sont pas *orthogonaux*.

- **Produit vectoriel** :

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & -2 & 3 \\ e_2 & 4 & 1 \\ e_3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ 6 + 9 \\ -2 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Comme $\vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0}$, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas *colinéaires*. De plus, l'aire du parallélogramme engendré par ces deux vecteurs est égale à $\| \vec{v} \times \vec{w} \| = \sqrt{(9)^2 + (15)^2 + (-14)^2} = \sqrt{502}$.

- **Produit mixte** :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ -14 \end{pmatrix} = 9 - 45 - 70 = -106$$

Comme $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas *coplanaires*. De plus, le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est égale à 106.

Dans le plan

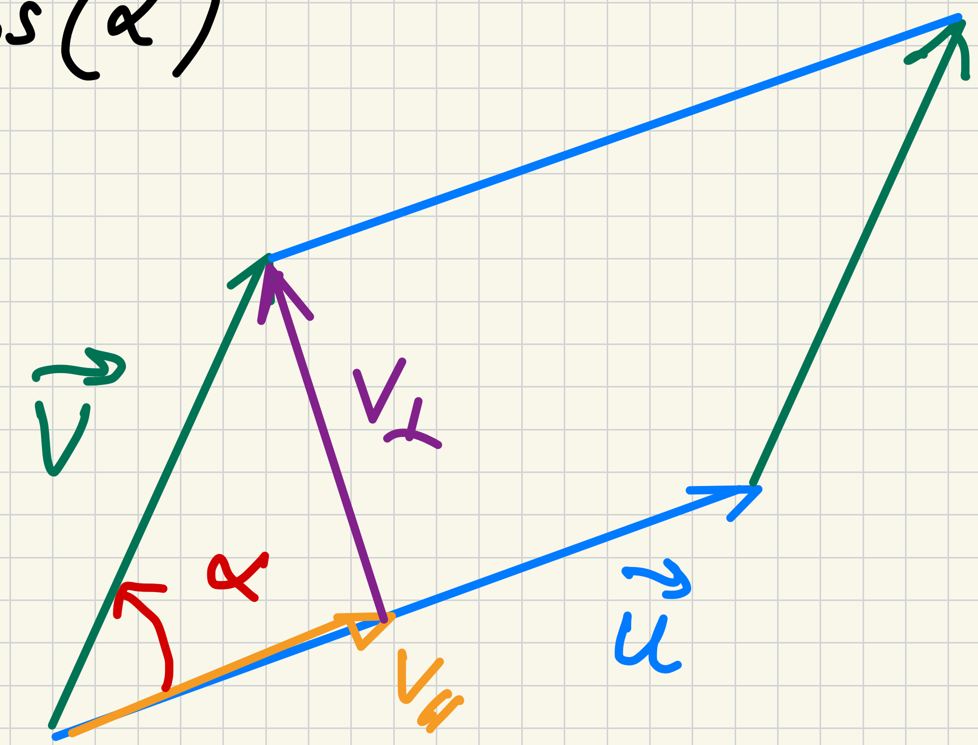
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aire du parallélogramme $(\vec{u}, \vec{v})$ vaut

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3(-4) = 17$$

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ plan

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$



$$|\cos(\alpha)| = \frac{\|\vec{V}_{/\!/}\|}{\|\vec{v}\|}$$

$$\Rightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{V}_{/\!/}\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{V}_{/\!/}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}}$$

- $\det(u, v) =$ Aire parallélogramme $(\vec{u}, \vec{v})$ (orientée)

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{V}_\perp\| = \frac{|\det(\vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u}\|}}$$

$$= \pm \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}_\perp\|$$

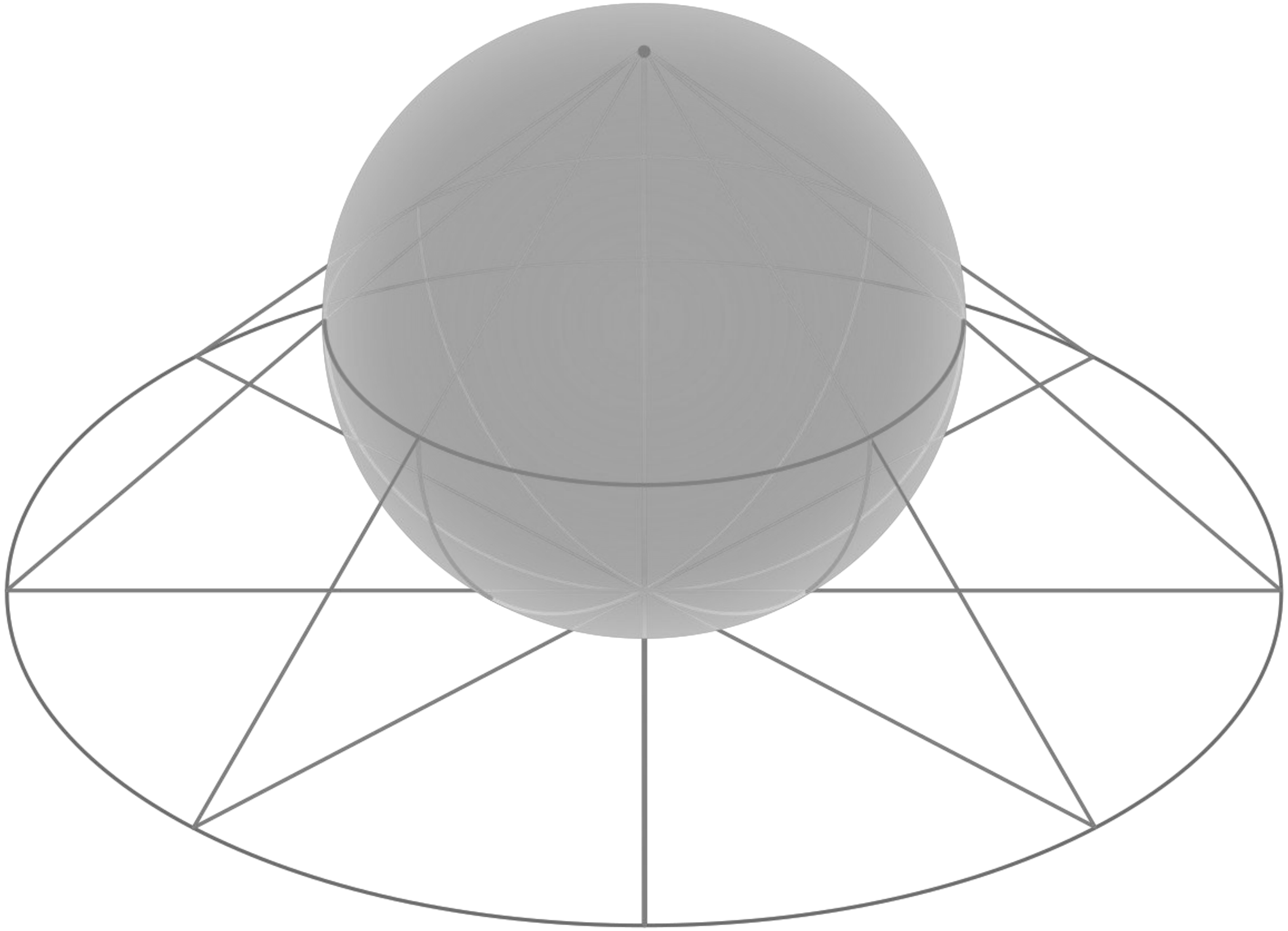
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ espace

- $\| \vec{v}_{\parallel} \| = \dfrac{| \vec{u} \cdot \vec{v} |}{\| \vec{u} \|}$ comme dans $\mathbb{R}^2$

- $\| \vec{u} \times \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \cdot \sin(\alpha)$

  $=$ Aire parallélogramme $(\vec{u}, \vec{v})$ (sans signe !)

- $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] =$ volume (orienté) du parallélépipède $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. (avec signe !)



Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Géométrie analytique

Philippe Chabloz

La droite dans l'espace

Trois points A, B et C dans l'espace $\mathbb{R}^3$ sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$, ou de manière équivalente si $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

- **Droite déterminée par deux points**

Soit deux points distincts A et B. La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace $\mathbb{R}^3$ alignés avec A et B :

$$(AB) = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}\}.$$

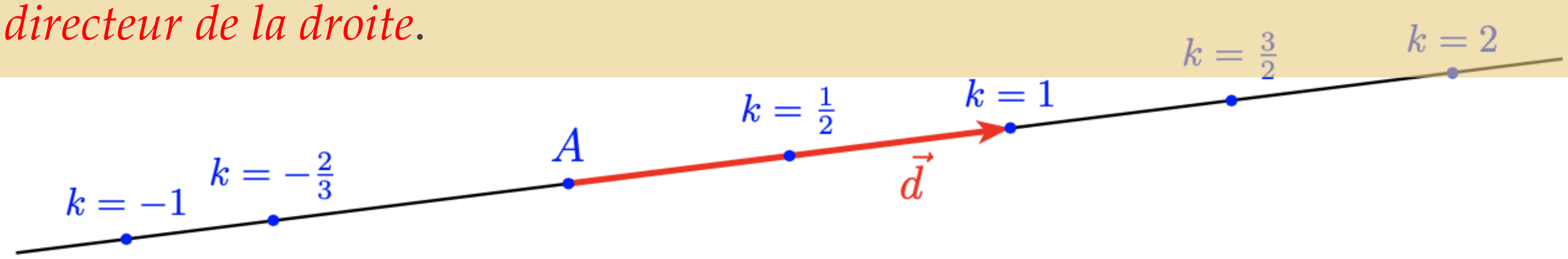
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé *vecteur directeur de la droite* (AB).

- **Droite déterminée par un point et une direction**

Soit un point A et un vecteur $\vec{d}$ non nul. La droite passante par A (appelé *point d'ancrage*) et de direction $\vec{d}$, est l'ensemble des points M de l'espace $\mathbb{R}^3$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires :

$$d(A, \vec{d}) = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{A\cancel{B}M} = k\vec{d}, k \in \mathbb{R}\}.$$

Le vecteur $\vec{d}$ est un *vecteur directeur de la droite*.

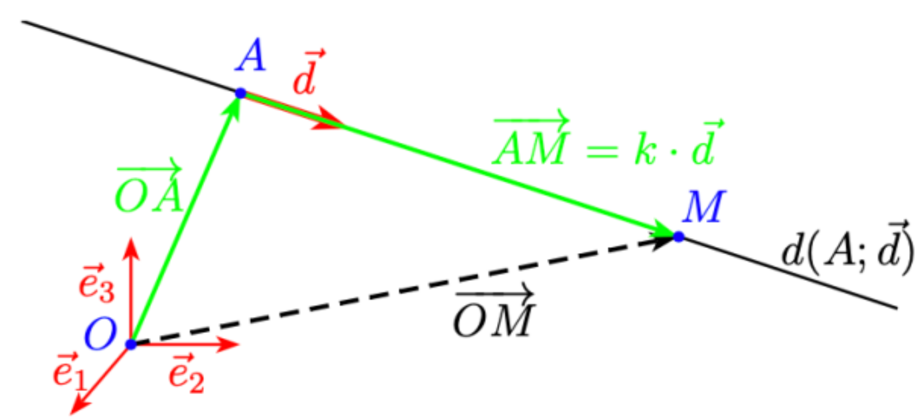


Équations paramétriques d'une droite

Soit la droite passante par le point $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ et dont le vecteur directeur est $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite si et seulement s'il existe un nombre $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\vec{d}$ où $k \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout point M de la droite, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}}_{A} + k \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}}_{\vec{d}}}.$$



Cette équation est une **représentation paramétrique de la droite**. Elle s'écrit aussi sous forme d'un système d'équations :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + k\,d_1 \\ y = y_A + k\,d_2 \\ z = z_A + k\,d_3 \end{cases}}$$

Remarque : contrairement aux droites du plan, une droite dans l'espace n'a pas d'équation cartésienne.

Exercice

Soient les points $A(-3,2,1)$ et $B(-1,3,-2)$.

a. Déterminer les équations paramétriques de la droite (AB).

b. Donner un point appartenant à la droite (AB).

c. Déterminer si le point $D(-9,8,10)$ appartient ou non à la droite (AB).

a. $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$k = 0 \Rightarrow A$

$k = 1 \Rightarrow B$

b. $k = 3 \Rightarrow C(3, 5, -8) \in (d)$

c. $D(-9, 8, 10) \in (d)$?

$$\begin{cases} -3 + 2k = -9 \\ 2 + k = 8 \\ 1 - 3k = 10 \end{cases} \Rightarrow k = 6$$

$\rightarrow -3 + 2 \cdot 6 = 9 \neq -9$

$\rightarrow 1 - 18 = -17 \neq 10$

$D \notin (d)$

$E(9, 8, -17) \in (d)$ $\quad k = 6$

$$(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$A \in (d)$

$\vec{d}$ vect. director

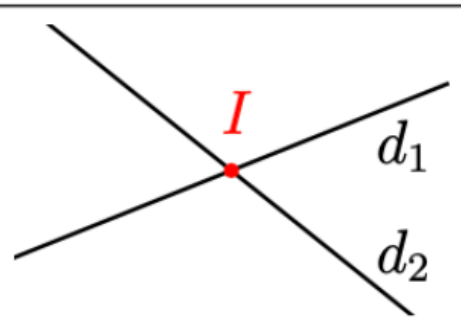
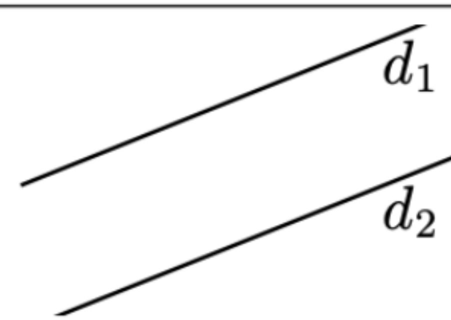
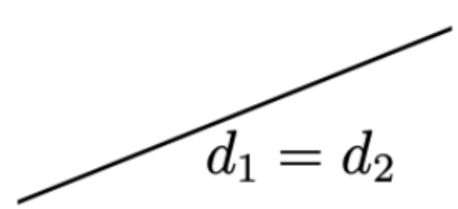
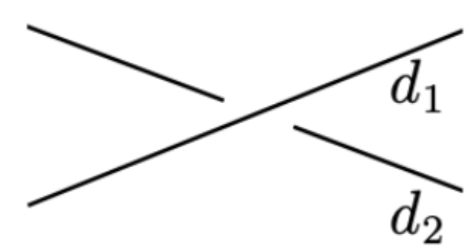
Positions relatives de deux droites dans l'espace

Soient d_1 et d_2 deux droites dans l'espace de vecteur directeur respectif $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$.

a) Si $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ sont colinéaires alors les droites d_1 et d_2 sont **parallèles** ou **confondues**.

b) Si $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ ne sont pas colinéaires alors les droites d_1 et d_2 sont **sécantes** (elles se coupent) ou bien elles sont **gauches** (elles ne se coupent pas).

On donne, dans le tableau ci-dessous, les quatre positions relatives possibles de deux droites d_1 et d_2 dans l'espace.

<table>
<tr><th rowspan="2">Sécantes</th><th colspan="2">Parallèles</th><th rowspan="2">Gauches</th></tr>
<tr><th>distinctes</th><th>confondues</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr><td>Un unique point I d'intersection</td><td>Aucun point d'intersection</td><td>Infinité de points d'intersection (droites)</td><td>Aucun point d'intersection</td></tr>
<tr><td colspan="3">Droites coplanaires</td><td></td></tr>
</table>

$$(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(d') : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$t = 1 \Rightarrow A(2, 1, 6)$

$s = 0 \Rightarrow A(2, 1, 6)$

$\Rightarrow d = d'$

Le plan

Quatre points distincts A, B, C et D dans l'espace sont **coplanaires** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires : $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$. Il existe trois nombres réels α, β et γ non tous nuls tels que :

$$\alpha\, \overrightarrow{AB} + \beta\, \overrightarrow{AC} + \gamma\, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}.$$

- **Plan déterminé par trois points**

Soit trois points A, B et C distincts et non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace $\mathbb{R}^3$ coplanaires avec A, B et C :

$$(ABC) = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{AM} = k_1\, \overrightarrow{AB} + k_2\, \overrightarrow{AC},\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux *vecteurs directeurs du plan* (ABC).

- **Plan déterminé par un point et deux vecteurs directeurs**

Soit un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le plan passant par le point A (appelé *point d'ancrage*) et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est l'ensemble des points M de l'espace $\mathbb{R}^3$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires :

$$\boxed{p(A; \vec{u}; \vec{v}) = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{AM} = k_1\, \vec{u} + k_2\, \vec{v},\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}.}$$

Un plan peut également être déterminé par : une droite et un point ne lui appartenant pas, deux droites sécantes ou deux droites parallèles distinctes.

Équations paramétriques d'un plan

Soit le plan p passant par le point $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ et dont les vecteurs directeurs sont $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

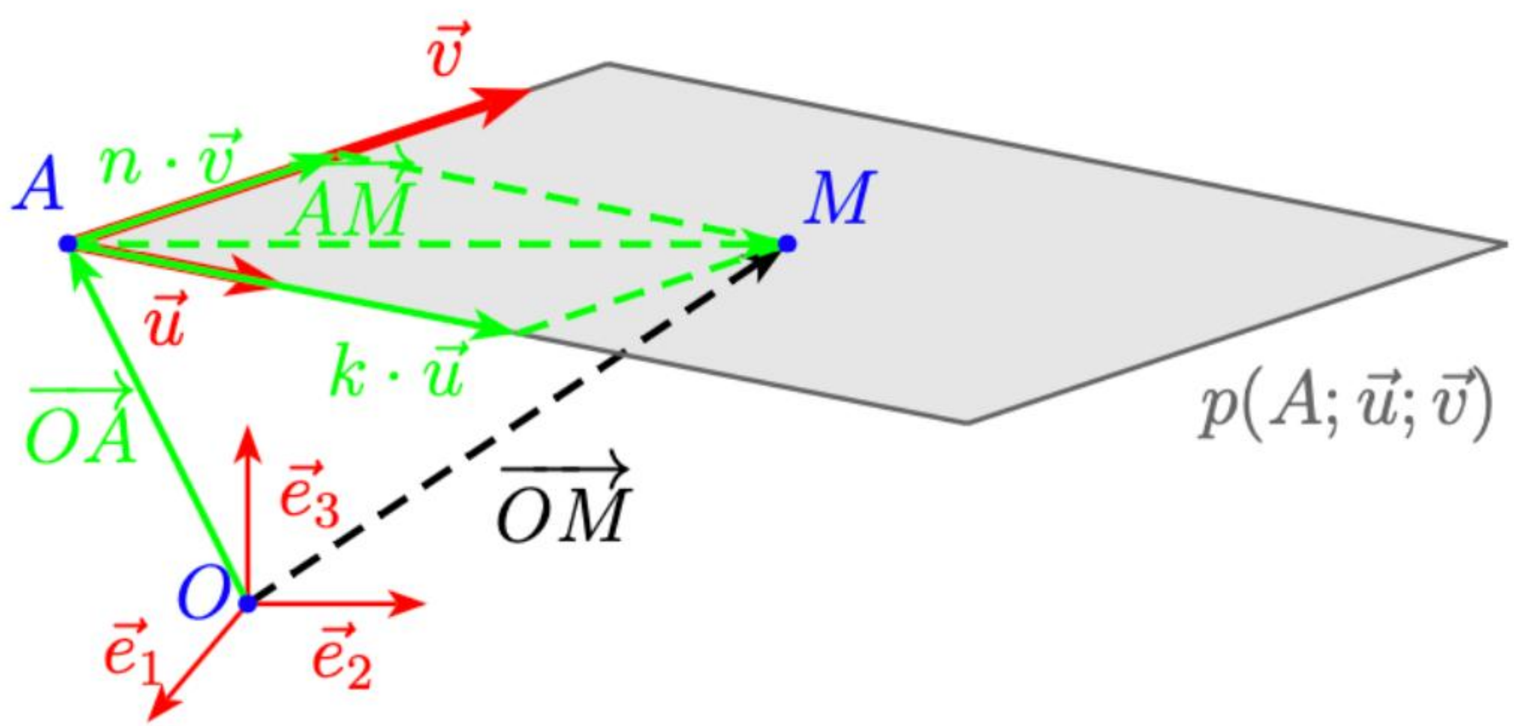
Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement s'il existe un couple des nombres $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k_1\,\vec{u} + k_2\,\vec{v}$ où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k_1\,\vec{u} + k_2\vec{v} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

Cette équation est une **représentation paramétrique du plan**. Elle s'écrit aussi sous forme d'un système d'équations :

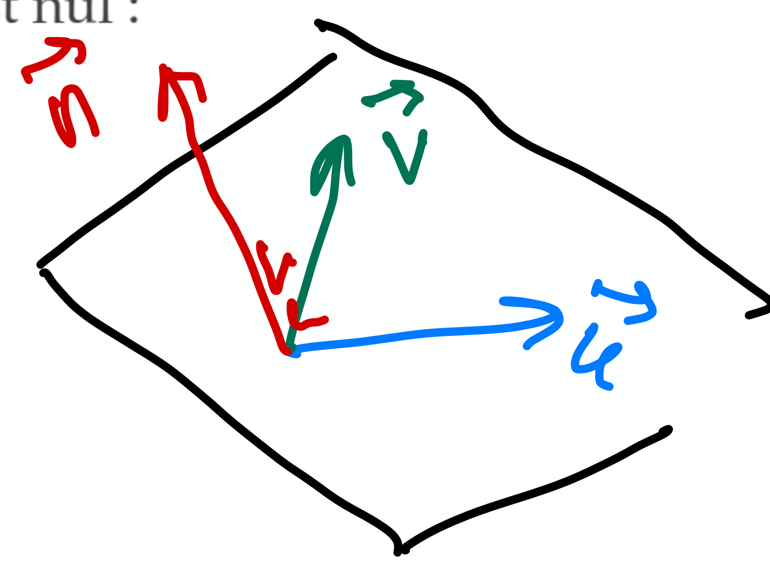
$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + k_1\,u_1 + k_2\,v_1 \\ y = y_A + k_1\,u_2 + k_2\,v_2 \\ z = z_A + k_1\,u_3 + k_2\,v_3 \end{cases}}$$



Équation cartésienne d'un plan

- Soit le plan p passant par le point d'ancrage $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ et admettant comme vecteurs directeurs $\vec{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right)$ et $\vec{v} = \left(v_1, v_2, v_3\right)$.
- Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan p si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Or, ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si le produit mixte est nul :

$$[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$$



d'où

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x - x_A & u_1 & v_1 \\ y - y_A & u_2 & v_2 \\ z - z_A & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

- En effectuant ce déterminant et en regroupant les termes, on obtient une équation du type :

$$\underline{a}x + \underline{b}y + \underline{c}z + d = 0$$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

où a, b, c et d sont quatre nombres réels. Cette équation est appelée l'équation cartésienne du plan p.

- Le vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ est un **vecteur normal** au plan p.

orthogonal.

Exercice

Soit les points $A(-3,2,1)$, $B(-1,3,-2)$ et $C(-3,-2,-2)$.

a. Déterminer les équations paramétriques du plan contenant les points A, B et C.

b. Donner un point appartenant au plan (ABC).

c. Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC).

d. Donner un vecteur normal au plan (ABC)

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 1, -3)$ $\quad$ $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, -4, -3)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$A\ (t=0, s=0)$ $\quad$ $B(t=1, s=0)$ $\quad$ $C(t=0, s=1)$

b. $$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}}_{A} + t\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}}_{\vec{u}} + s\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-4\\-3\end{pmatrix}}_{\vec{v}} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

$t = 2, \quad s = -3$

$$\Rightarrow \quad D(1, 16, 4) \in \Pi$$

c. $$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} e_1 & 2 & 0 \\ e_2 & 1 & -4 \\ e_3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\6\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$(\Pi): \; -15x + 6y - 8z = d$

$-15(-3) + 6\cdot 2 - 8\cdot 1 = 49$

$(\Pi): \; -15x + 6y - 8z = 49$

$D(1,16,4) \in \Pi$

Dans $\mathbb{R}^2$

droite : $2x + 3y = 7$

$$3y = -2x + 7$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \qquad m = -\frac{2}{3}$$

$$h = \frac{7}{3}$$

Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit d la droite d'équation paramétrique

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}\,, \quad \text{où } k \in \mathbb{R},$$

et soit p le plan d'équation paramétrique

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + k_1\,\vec{u} + k_2\vec{v}, \quad \text{où } k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

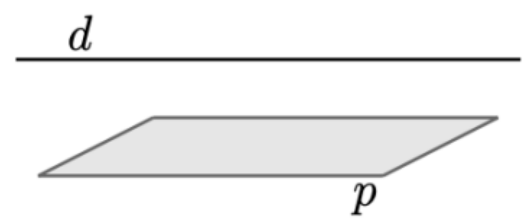
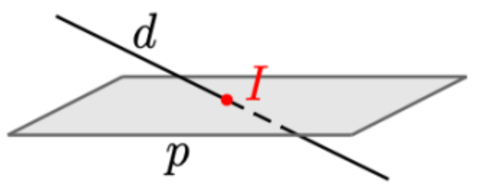
La droite d intersecte le plan p au point I s'il existe k, k_1 et k_2 tels que : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + k_1\,\vec{u} + k_2\vec{v}$ et $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + k\,\vec{d}$,

et donc $\overrightarrow{OA} + k\,\vec{d} = \overrightarrow{OB} + k_1\,\vec{u} + k_2\vec{v}$. C'est un système à trois équations pour trois inconnues : k, k_1 et k_2.

a) Si le système admet une unique solution alors le plan et la droite sont **sécants**.

b) Si le système admet une infinité de solutions alors la **droite appartient au plan**.

c) Si le système n'admet pas de solutions alors le plan et la droite sont **parallèle et distincts**.

d parallèle à p		d et p sécants
strictement	$d \subset p$	
		
Aucun point d'intersection	Infinité de points d'intersection (d)	Un unique point I d'intersection

Positions relatives de deux plans

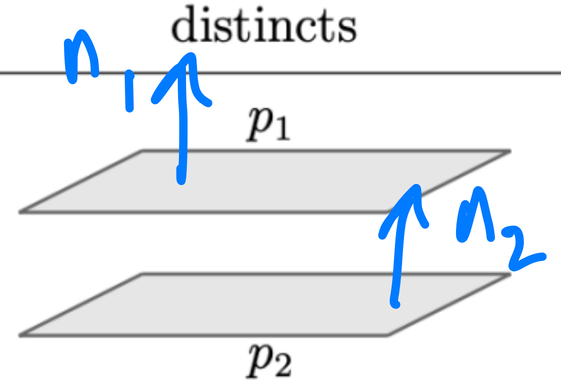
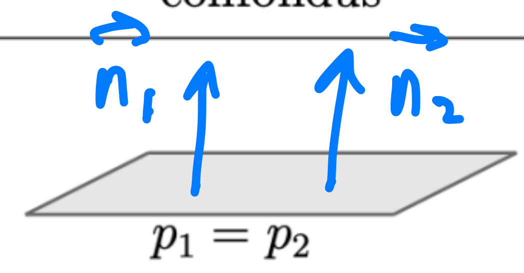
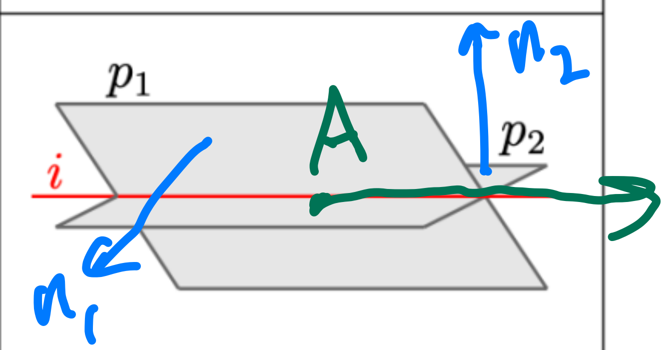
Soient p_1 et p_2 deux plans d'équations cartésiennes :

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\,, \quad \text{où } a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R},$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\,, \quad \text{où } a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R},$$

a) Si les vecteurs normaux $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ sont colinéaires alors les plans sont **parallèles**.

b) Si les vecteurs normaux $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ne sont pas colinéaires alors les plans sont **sécants**. Le vecteur directeur de la droite sécante est donné par $\boxed{\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2}$.

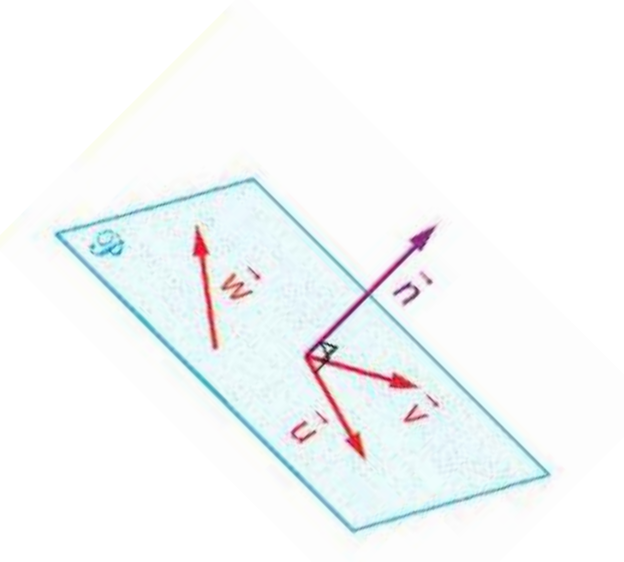
p_1 et p_2 parallèles		p_1 et p_2 sécants
distincts	confondus	
		
Aucun point d'intersection	Infinité de points d'intersection (plans)	Une unique droite i d'intersection

$\vec{d} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

Applications du produit scalaire

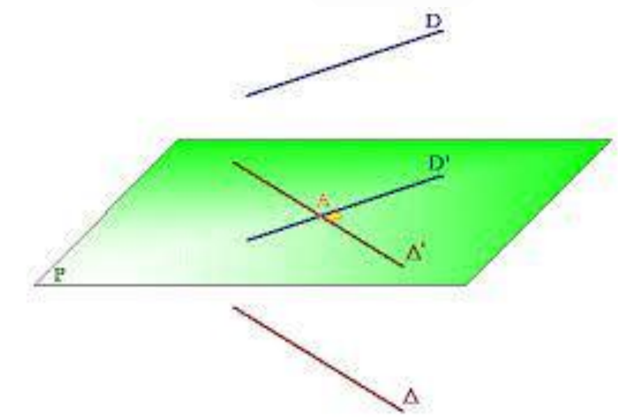
1. Vecteur normal à un plan

Le plan d'équation cartésienne (Π): $ax + by + cz + d = 0$ admet le vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ comme vecteur normal. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$



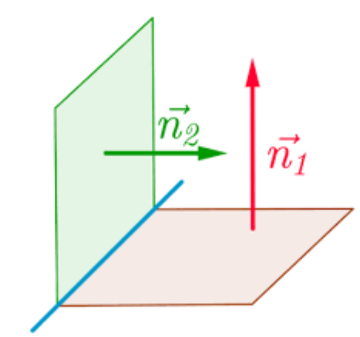
2. Droites orthogonales

Les droites d et g de vecteurs directeurs respectifs $\vec{d}$ et $\vec{g}$ sont orthogonales si les vecteurs $\vec{d}$ et $\vec{g}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si $\vec{d} \cdot \vec{g} = 0$.



3. Plans perpendiculaires

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

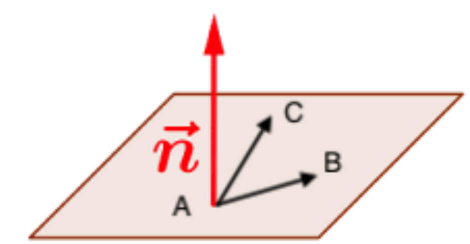


Applications du produit vectoriel

1. Détermination du vecteur normal à un plan

Soit trois points distincts A, B et C non alignés et le plan (ABC). Un **vecteur normal au plan** (ABC) est :

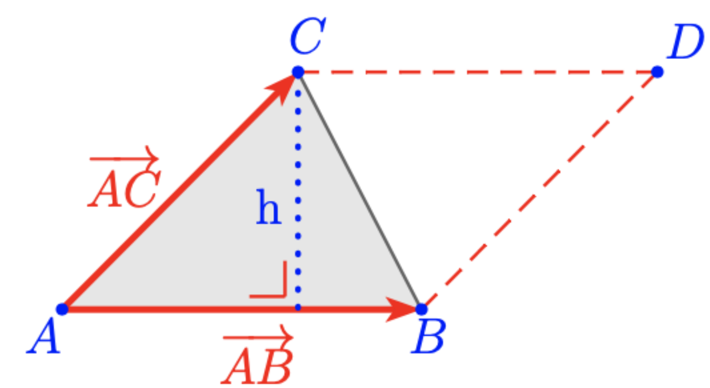
$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$



2. Aire d'un triangle

L'aire d'un triangle ABC vaut la moitié de l'aire du parallélogramme $ABCD$.

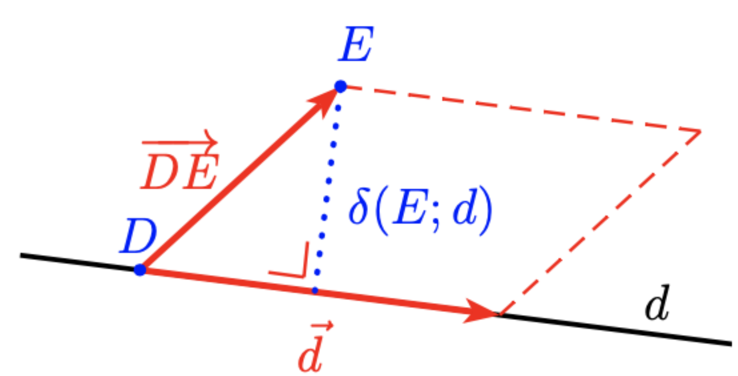
$$Aire(\Delta_{ABC}) = \frac{1}{2} \parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \parallel$$



3. Distance d'un point à une droite dans l'espace $\mathbb{R}^3$:

La distance d'un point E à une droite $d(D; \vec{d})$ est donnée par :

$$\delta(E; d) = \frac{\parallel \overrightarrow{DE} \times \vec{d} \parallel}{\parallel \vec{d} \parallel}$$



$A = \parallel \vec{d} \parallel \cdot \delta$

$$x + 2y - 3z = 4$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$-x - 2y + 3z = -4$$

$$\vec{n'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\vec{n}$$

Deux équations cartésiennes du même plan !

Applications du produit mixte

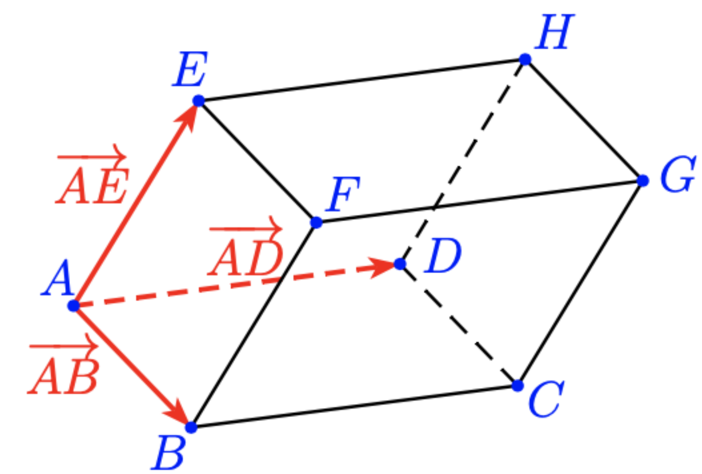
1. Volume d'un parallélépipède et d'un tétraèdre :

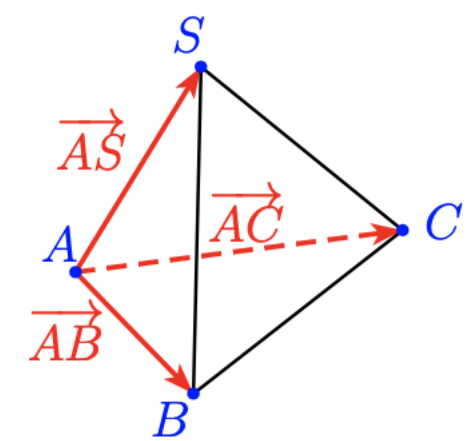
Le **volume du parallélépipède** $ABCDEFGH$ est donné par :

$$V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}]|$$

Le volume du tétraèdre $SABC$ est donné par :

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}]|$$

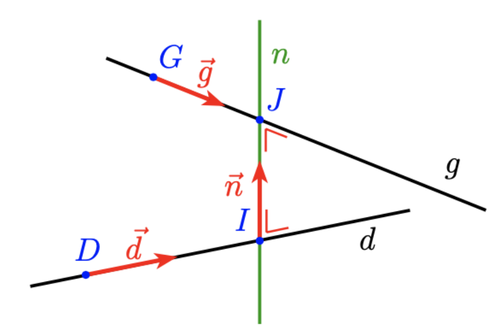




2. Distance de deux droites gauches

Soient deux droites gauches $d(D; \vec{d})$ et $g(G; \vec{g})$. La distance entre les deux droites gauches est donnée par :

$$\delta(d; g) = \frac{|[\overrightarrow{DG}, \vec{d}, \vec{g}]|}{\| \vec{d} \times \vec{g} \|} = \frac{\mathrm{Vol}(\overrightarrow{DG}, \vec{d}, \vec{g})}{\mathrm{Aire}(\vec{d}, \vec{g})}$$

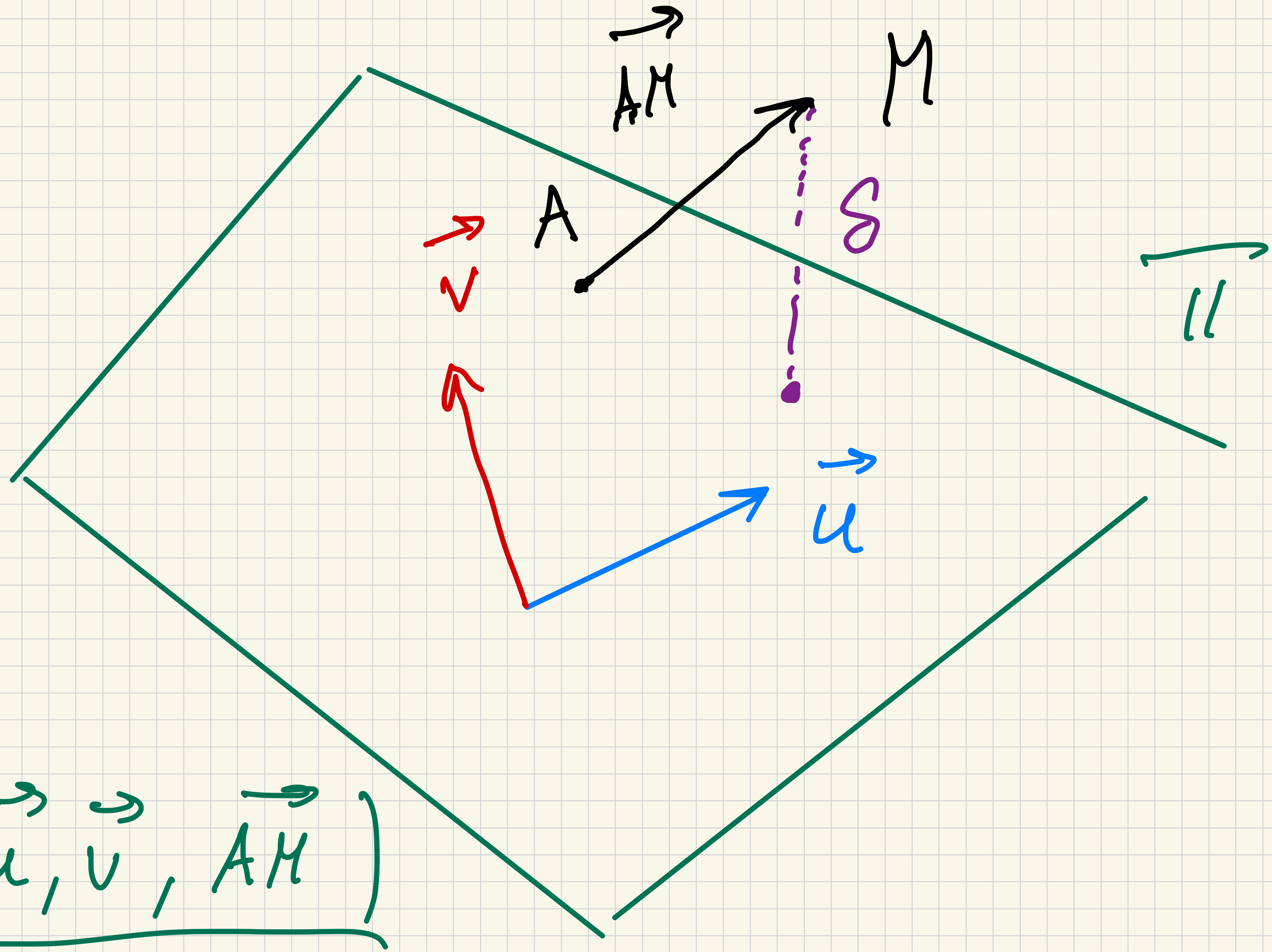


3. Distance d'un point à un plan

Soit un plan Π de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, un point A dans le plan Π et un point M extérieur au plan. Alors la distance entre le point M et le plan vaut

$$\delta(M; \Pi) = \frac{|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\| \vec{u} \times \vec{v} \|} = \frac{\mathrm{Vol}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})}{\mathrm{Aire}(\vec{u}, \vec{v})}$$

$A \in \Pi$
$M \notin \Pi$



$$\frac{\mathrm{Vol}\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}\right)}{\mathrm{Aire}\left(\vec{u}, \vec{v}\right)}$$

Distance d'un point à un plan

Distance d'un point à un plan

Soit un plan Π de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, un point A dans le plan Π et un point $M(x_M, y_M, z_M)$. Alors la distance entre le point M et le plan vaut

$$\delta(M;\Pi) = \frac{|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\| \vec{u} \times \vec{v} \|}$$

Si le plan est donné sous forme cartésienne: $\quad (\Pi) : ax + by + cz + d = 0$

alors on sait que le vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c)$ est, à une constante près, égal à $\vec{u} \times \vec{v}$, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\vec{u} \times \vec{v} = \lambda \vec{n}}.$$

Si on note $H(x_H, y_H, z_H)$ la projection de M sur le plan, alors la distance du point M au plan devient

$$\boldsymbol{\delta(M;\Pi)} = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \lambda \vec{n}|}{\|\lambda\, \vec{n}\|} = \frac{|(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|ax_M + by_M + cz_M - (ax_H + by_H + cz_H)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemple

plan (π) : $2x + 3y - z - 10 = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

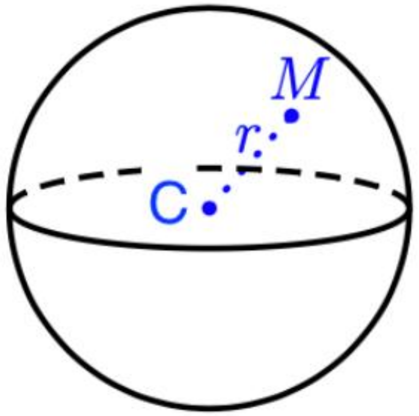
$M(4, 5, 6) \notin \pi$

$$\delta(M, \pi) = \frac{|2\cdot 4 + 3\cdot 5 - 6 - 10|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

Si $M \in \pi$ alors $2x_M + 3y_M - z_M - 10 = 0$

$\Rightarrow \delta(M, \pi) = 0$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$



La sphère

On appelle sphère Σ de centre C et de rayon r $\left(r \in \mathbb{R}_+\right)$ l'ensemble des points M de l'espace $\mathbb{R}^3$ situés à la distance r du centre C. On a donc :

$$M \in \Sigma \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta(C; M) = \|\overrightarrow{CM}\| = r.$$

- Soit $C(x_0, y_0, z_0)$, alors $\|\overrightarrow{CM}\| = r$ si et seulement si

$$\left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right\| = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2} = r.$$

- L'équation cartésienne (canonique) de la sphère de centre $C(x_0, y_0, z_0)$ et rayon r est

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2 = r^2.$$

En développant la formule ci-dessus, on obtient une équation de la forme

$$ax^2 + ay^2 + az^2 + 2bx + 2cy + 2dz + e = 0$$

avec $a \neq 0$, appelé équation générale de la sphère.

dans le Plan $\mathbb{R}^2$

1) $2x - 3y = 5$ droite

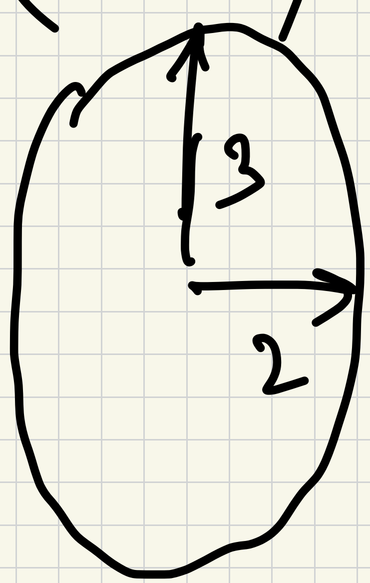
2) $x^2 + y^2 = 9$ Cercle $C(0,0)$

$R = 3$

3) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ Ellipse

$a = 2$

$b = 3$



Equations cartésiennes

Dans le **plan**, **1 seule équation cartésienne** détermine en général **une courbe**.

Exemples:

1. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x^2 - 4x + 1\}$ est une parabole du plan
2. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1 = 0\}$ est une ellipse dans le plan

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, **1 seule équation cartésienne** détermine en général **une surface**.

Exemples:

1. L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 5\}$ est un plan de l'espace
2. L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9\}$ est la surface latérale d'un cylindre vertical et dont la section est un cercle de rayon 3 (mais ce n'est PAS un cercle !!).