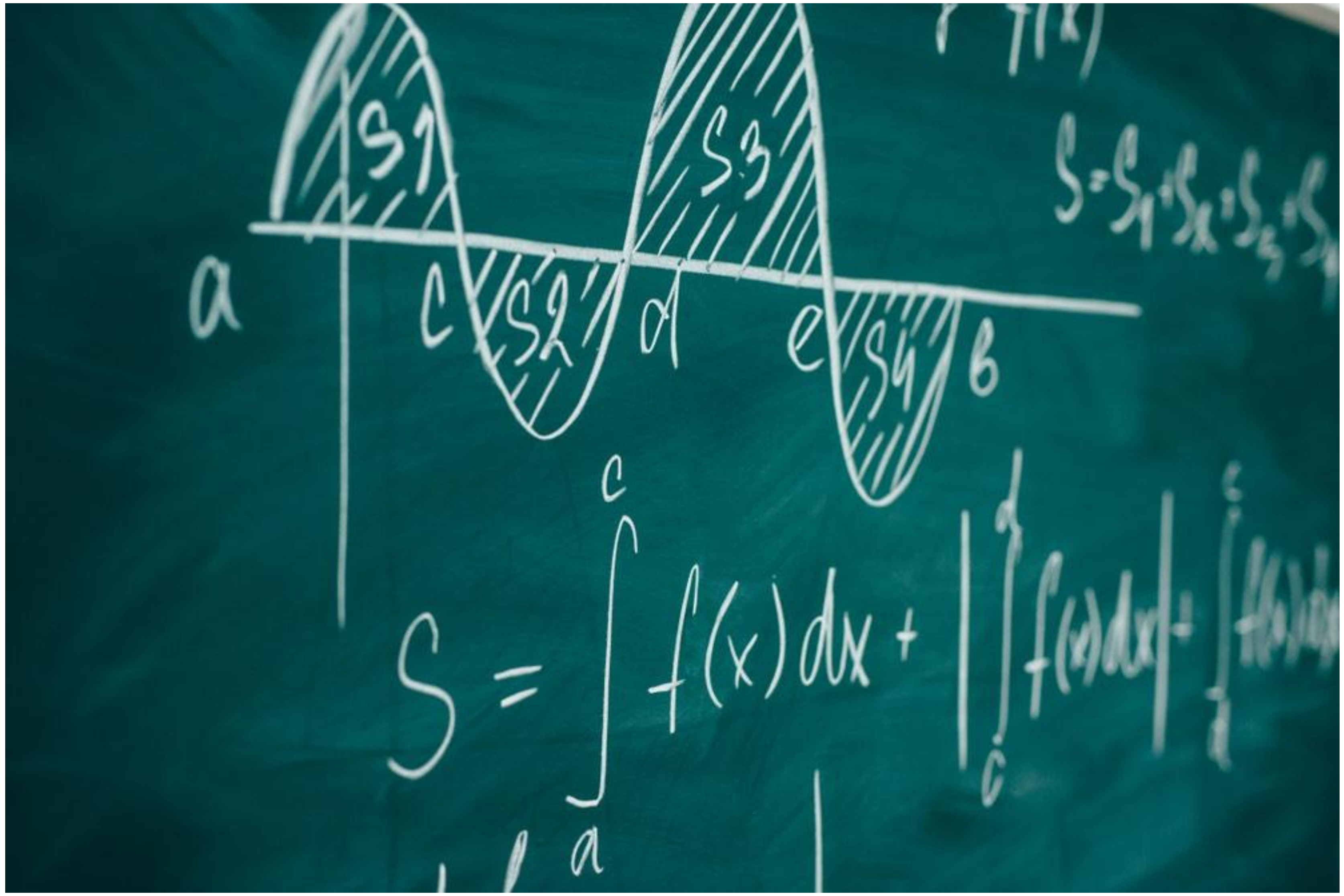
EPFL



Section d'architecture SAR - Bachelor semestre 1

Calcul intégral

Philippe Chabloz

1) $f(x) = 7 + 5x^8 + o(x^8)$

$x_0 = 0$ pt stationnaire $\cup$

$\Rightarrow$ Min local en $x_0 = 0$

car 8 est pair et $5 > 0$

2) $f(x) = 11 + 4(x-1)^7 + o((x-1)^7)$

$x_0 = 1$ est un pt stationnaire car le terme en $(x-1)$ vaut 0. plat car 7 impair

3) $f(x) = -24 - 4(x-3)^6 + o[(x-3)^6]$

$x_0 = 3$ est un point stationnaire

6 pair $-4 < 0$ $\cap$ Max local en $x_0 = 3$

4) $f(x) = 7 + 2(x-4) + 7(x-4)^5 + o\left[(x-4)^5\right]$

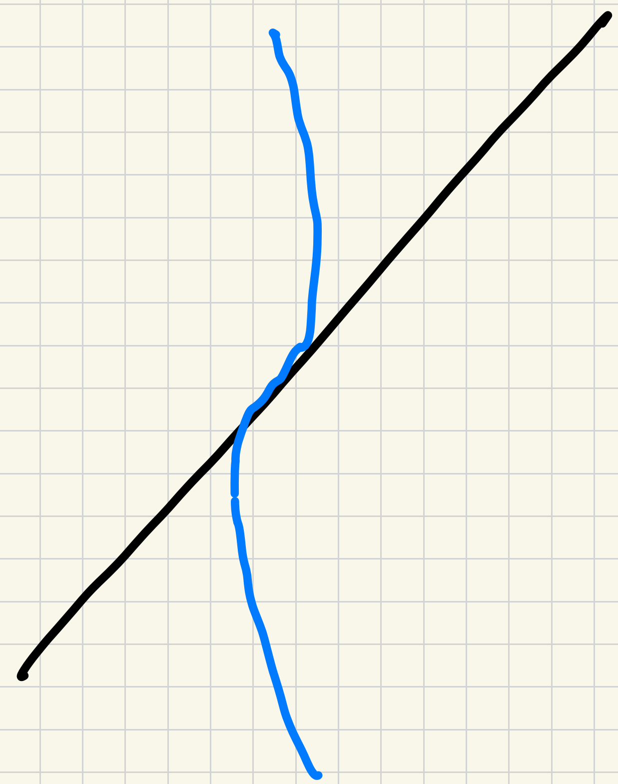
$x_0 = 4$ n'est PAS un pt stationnaire

à cause du terme $2(x-4)$

c'est un pt

d'inflexion car

5 est impair !!



Une perspective historique

- On désigne par *calcul infinitésimal* l'outil de calcul élaboré à parti du XVIIe siècle mettant en jeu des quantités « *infiniment petites* ».
- Ses principales applications sont le *calcul différentiel* (notion de vitesse, de tangente à une courbe, de dérivée…) et le *calcul intégral* (calcul de la longueur d'une courbe, de l'aire d'une surface, du volume d'un solide).
- Les principaux auteurs qui ont contribué à la théorie du calcul intégral sont :

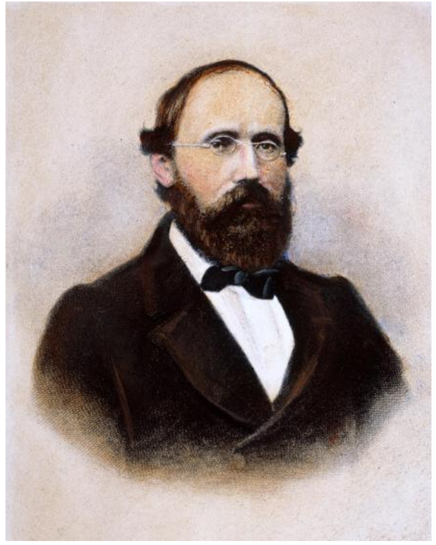
IIIe siècle

Archimède

XVIIe siècle

Gottfried Leibniz

XIXe siècle



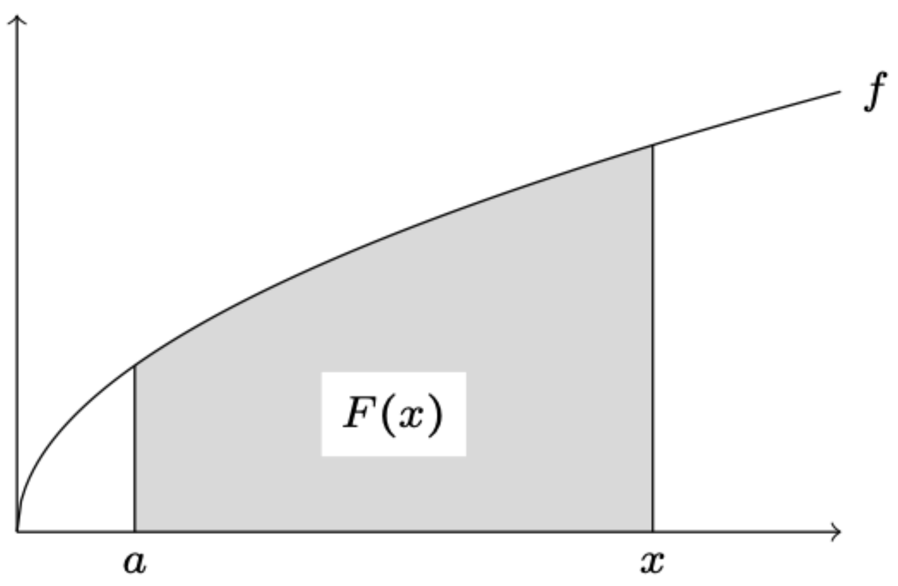
Bernhard Riemann

XXe siècle

Henri Lebesgue

L'aire sous la courbe

- Étant donnée une fonction f continue et positive, de nombreux problèmes d'application concernent le calcul de l'aire entre la courbe décrite par l'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites verticales passant par les points $(a, 0)$ et $(x, 0)$, où $x \geq a$.



- Comme cette aire dépend du point x, il est naturel de la définir comme une fonction de x, désignons-la par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

- Il est clair que $F(a) = 0$ et $F(x) \geq 0$ pour $x \geq a$.

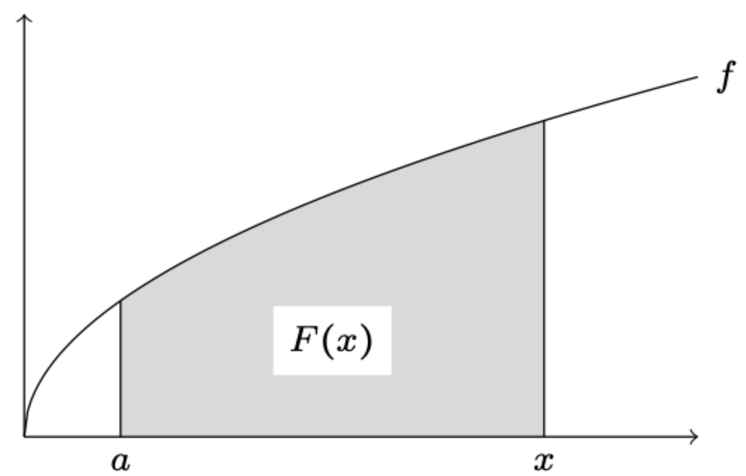
La notion de primitive

Théorème de Leibniz (*Geometria recondita* - 1686)

La fonction F, qui donne l'aire sous la courbe décrite par la fonction continue et positive f, est dérivable et

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \geq a$$

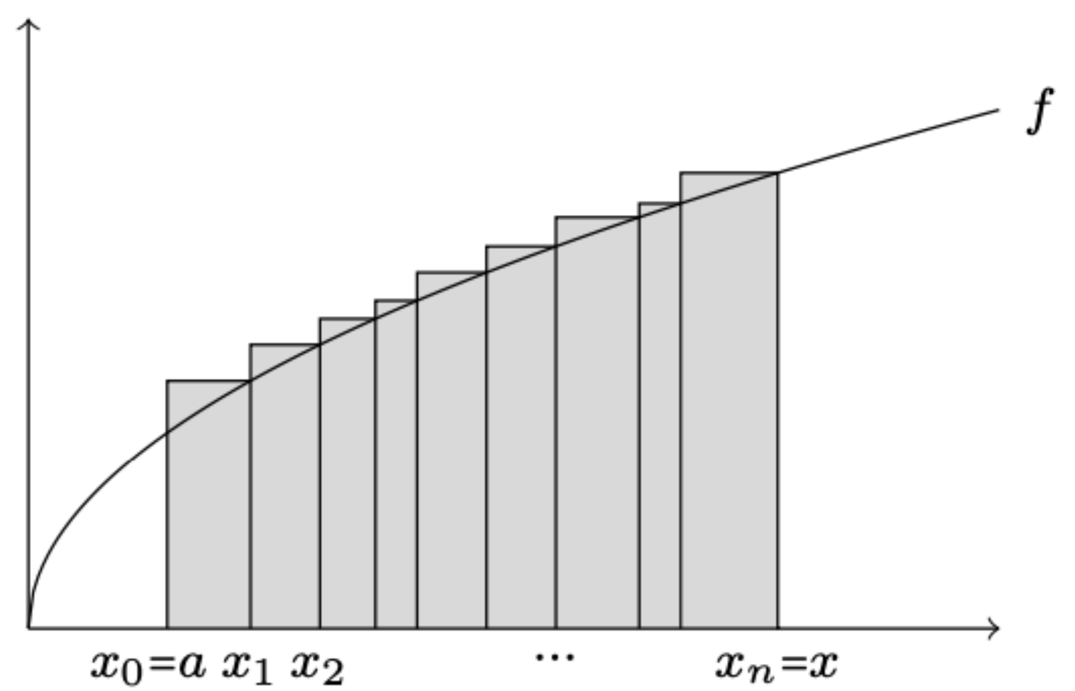
Point crucial : la fonction f est la dérivée de la fonction F.



Nomenclature : On dira qu'une fonction F est une **primitive** d'une fonction f si

$$F'(t) = f(t) \qquad \forall t \in [a, x] \cap \mathcal{D}_f.$$

En utilisant le *principe de découpage à la Fermat*, Leibniz considère l'aire sous la courbe comme une somme des aires de rectangles « *infiniment* » petits.

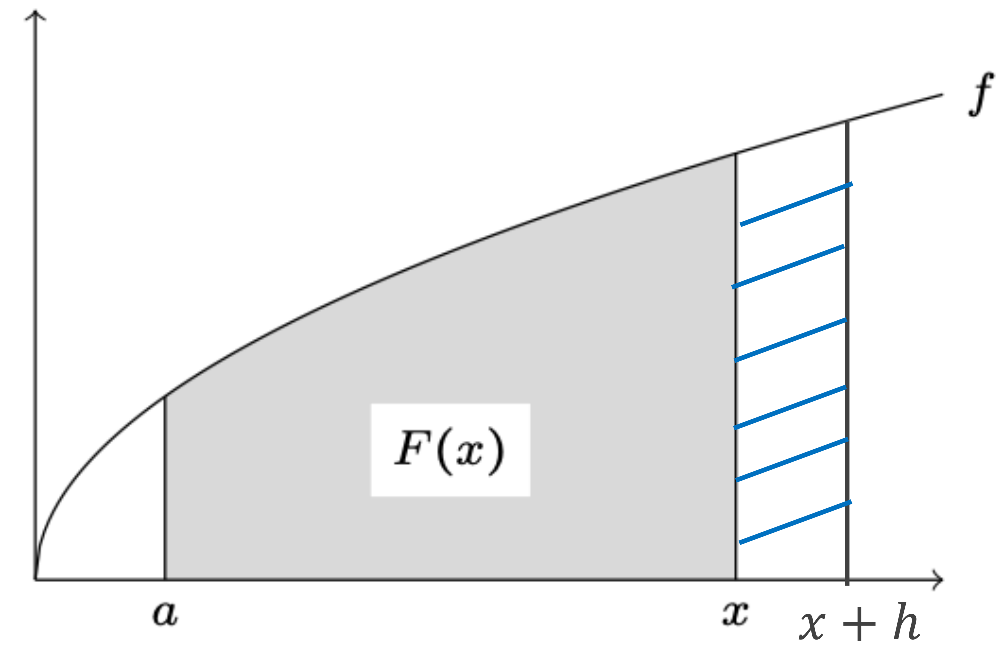


Démonstration intuitive du théorème de Leibniz

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Alors

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \geq a$$



$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\ dt}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\text{Aire bleue}}{h} = = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot f(x)}{h} = f(x)$$

$r(t)$ distance (position)

$r'(t) = \dfrac{dr}{dt}$ vitesse

$$\int_{t=0}^{T} \underbrace{r'(t)\,dt}_{dr} = r(T) - r(0) = L$$

$$r'(t) = \frac{dr}{dt} \Rightarrow dr = r'(t) \cdot dt$$

Intégrale indéfinie vs intégrale définie

- Comme l'aire est donnée par une somme infinie d'aires de rectangles, Leibniz s'est servi de l'initiale du mot latin *summa*, « *somme* » et de l'ancien symbole *s long*, pour indiquer une primitive de f :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$F(a) = 0$

- Pour designer l'aire sous la courbe entre les deux bornes a et b, Jean Baptiste Fourier introduit la notation de l'intégrale de f entre a et b (aussi appelée intégrale définie) :

$$\int_a^b f(x)dx$$

- **Remarque** : Une fonction f possède en général une infinité de primitives. En effet si $F'(x) = f(x)$, alors $(F(x) + c)' = f(x)$ pour toute constante $c \in \mathbb{R}$. Nous utiliserons la notation :

$$\int f(t)dt$$

pour dénoter l'ensemble de toutes les primitives de la fonction f (intégrale indéfinie).

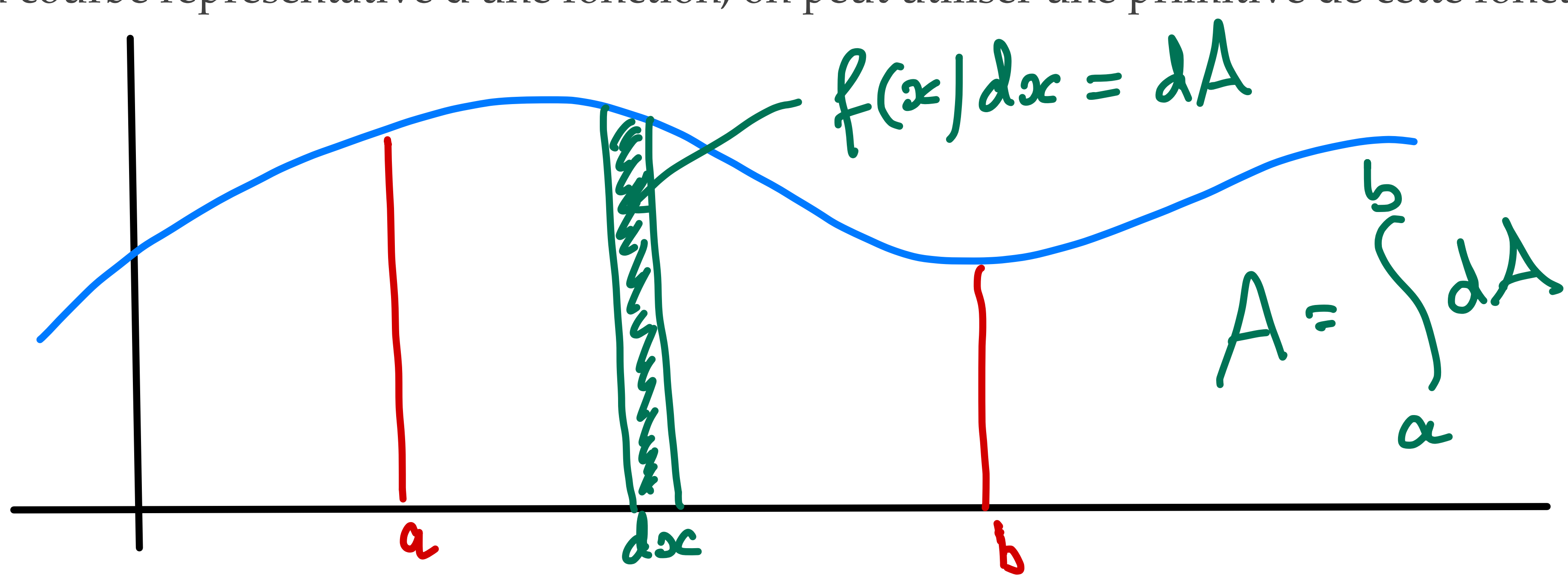
Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a, b]$, où a et b sont deux constantes réelles. Soit ***F* une primitive de *f*** sur l'intervalle I, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Ce théorème est extrêmement utile si nous voulons calculer l'intégrale définie de f et que nous connaissons une primitive F de f. Il établit **que la dérivation et l'intégration, sont réciproques l'une de l'autre** et que pour calculer une aire sous la courbe représentative d'une fonction, on peut utiliser une primitive de cette fonction.



Propriétés des intégrales définies

Soit f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et soit $a, b \in \mathbb{R}$ deux constantes telles que $a \leq b$.

1. La variable d'intégration est muette :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$$

2. Intégration sur un intervalle de longueur nulle :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3. Inversion des bornes d'intégration :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

4. Linéarité de l'intégrale : soient $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ deux constantes, alors

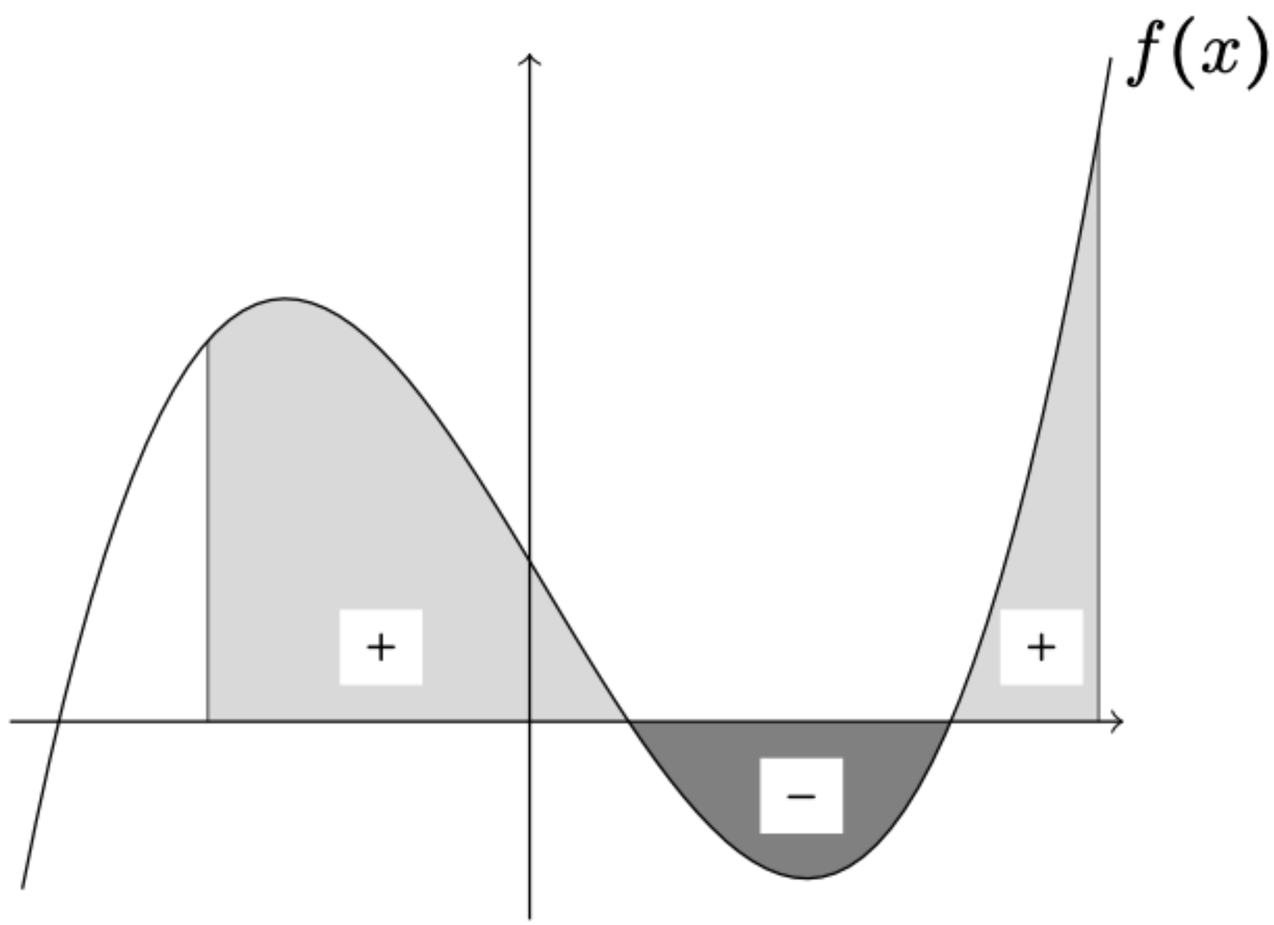
$$\int_a^b k_1\,f(x) + k_2 g(x)\,dx = k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx$$

5. Additivité d'un intervalle d'intégration : soit $a \leq c \leq b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Intégrale = aire avec signe

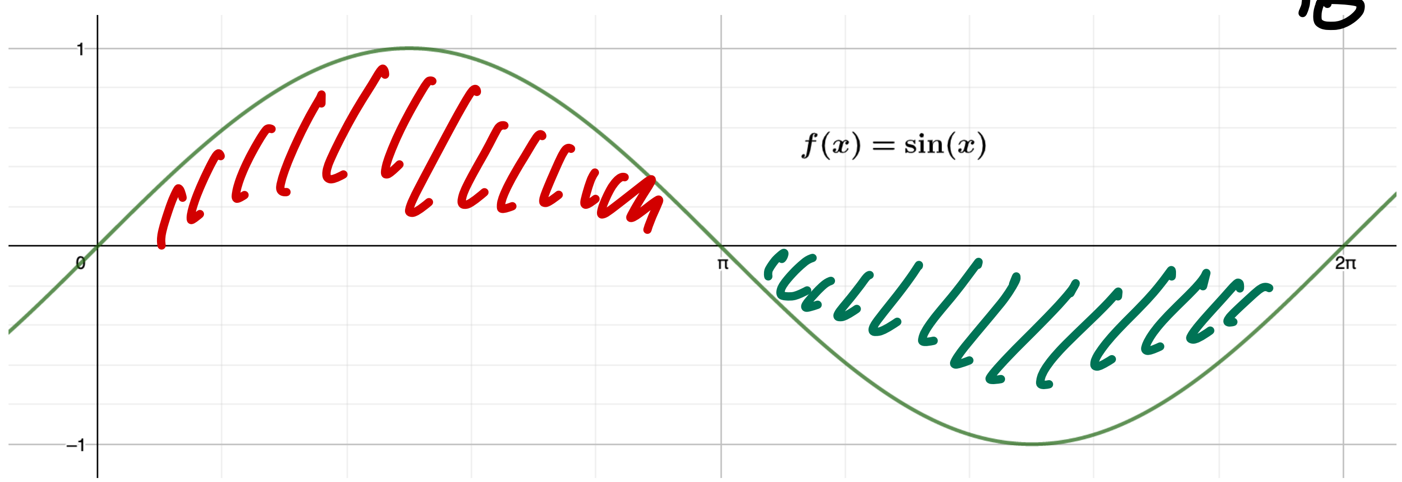
- Lorsqu'une intégrale est interprétée comme une aire, notons que celle-ci peut être négative. La "*justification*" de Leibniz montre que l'aire entre la courbe et l'axe Ox dépend du signe de la fonction $f(x)$.
- Une surface est positive, tandis que $\int_a^b f(t)dt$ est un nombre qui peut être négatif. $b > a$
- L'intégrale représente donc une *aire avec signe*.



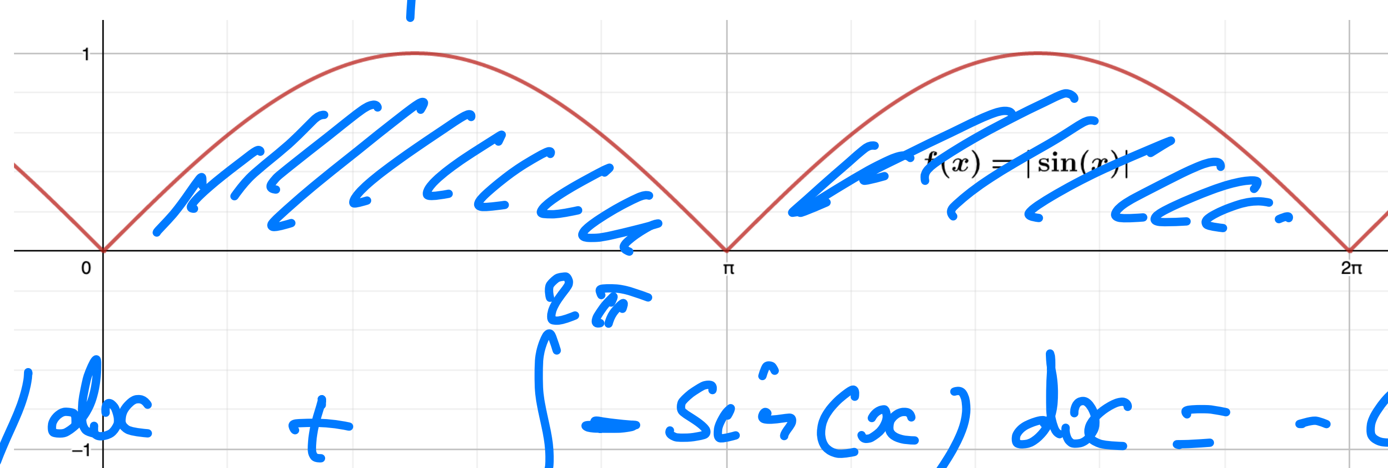
Exercice

Évaluer les deux intégrales définies suivantes :

a) $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$ $= 0$ $= -\cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0$



b) $\int_0^{2\pi} |\sin(x)|dx$ $4 = 2 + 2 = +\cos(x)\Big|_\pi^{2\pi}$



$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx + \int_\pi^{2\pi} -\sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Table de primitives

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1} \qquad \int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (\text{if } a \neq -1)$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\frac{d}{dx}b^x = b^x\ln(b) \qquad \int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \qquad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x) \qquad \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C$$

primitive

Expression de F	Expression de F'
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\mathrm{argch}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{argsh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{argth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln\lvert g(x)\rvert + C$
$g^{\alpha}(x) \cdot \underline{\underline{g'(x)}}$ $\quad \alpha \neq -1$	$\frac{g^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$
$\frac{g'}{1+g^2}$	$\arctan(g) + C$
$g'(x) \cdot e^{g(x)}$	$e^{g(x)} + C$
$g'(x) \cdot \cos(g(x))$	$\sin(g(x)) + C$

1. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \cdot \underbrace{(x^3+2)}^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$g' \cdot g^{\alpha} \qquad \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+2} + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

2. $$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+7}\,dx = \ln|x^3+x+7| + C$$

$$\frac{g'}{g} \qquad C \in \mathbb{R}$$

3. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx$

$$\frac{g'}{1+g^2}$$

$= \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$

4. $\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\ln|1+x^4| + C$

$$\frac{g'}{g}$$

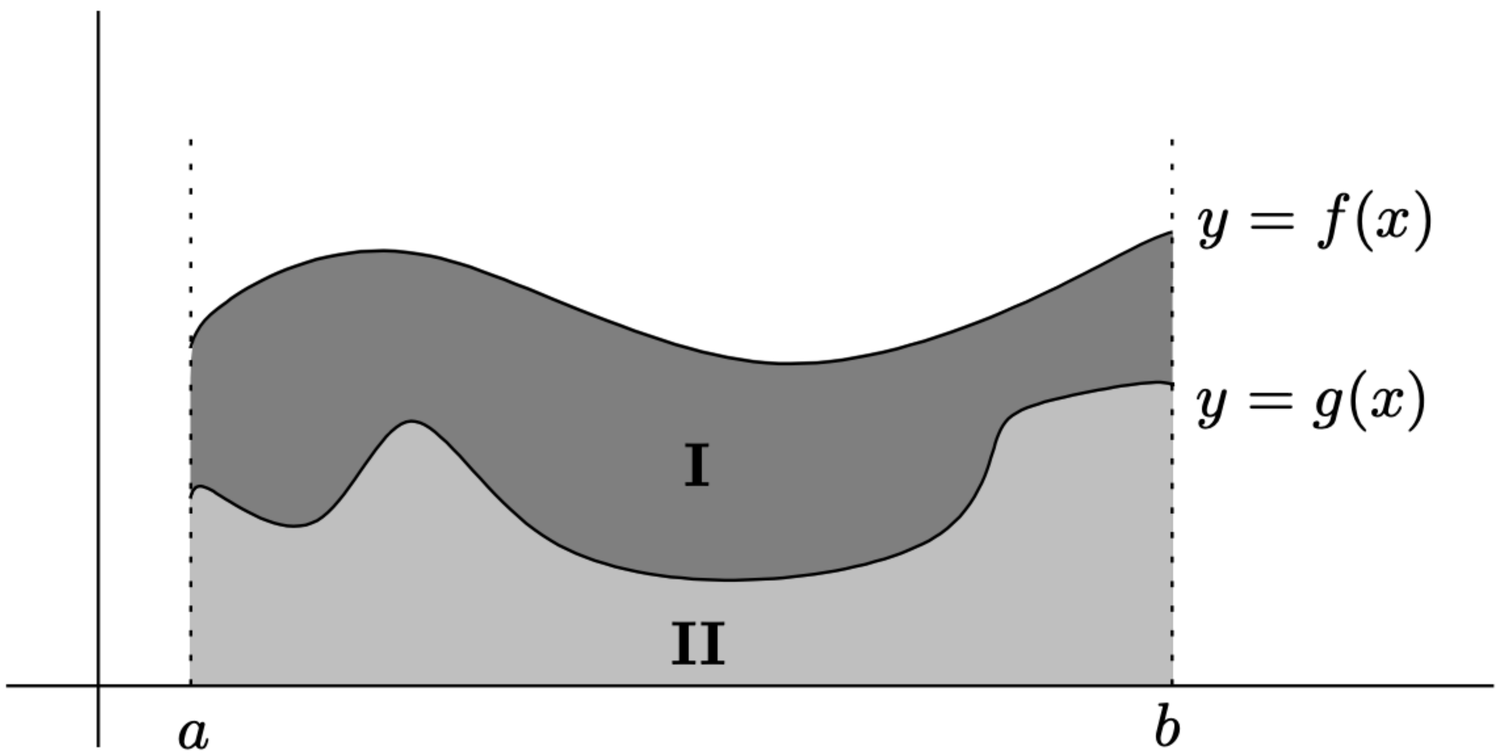
Calcul de l'aire entre deux courbes

Supposons que nous avons deux courbes définies par $y = f(x)$ et $y = g(x)$, où f et g sont deux fonctions continues.

- Si les deux courbes sont l'une au-dessus de l'autre (par exemple $f(x) \geq g(x)$), alors l'aire de la région entre les courbes et les droites $x = a$ et $x = b$ est

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$

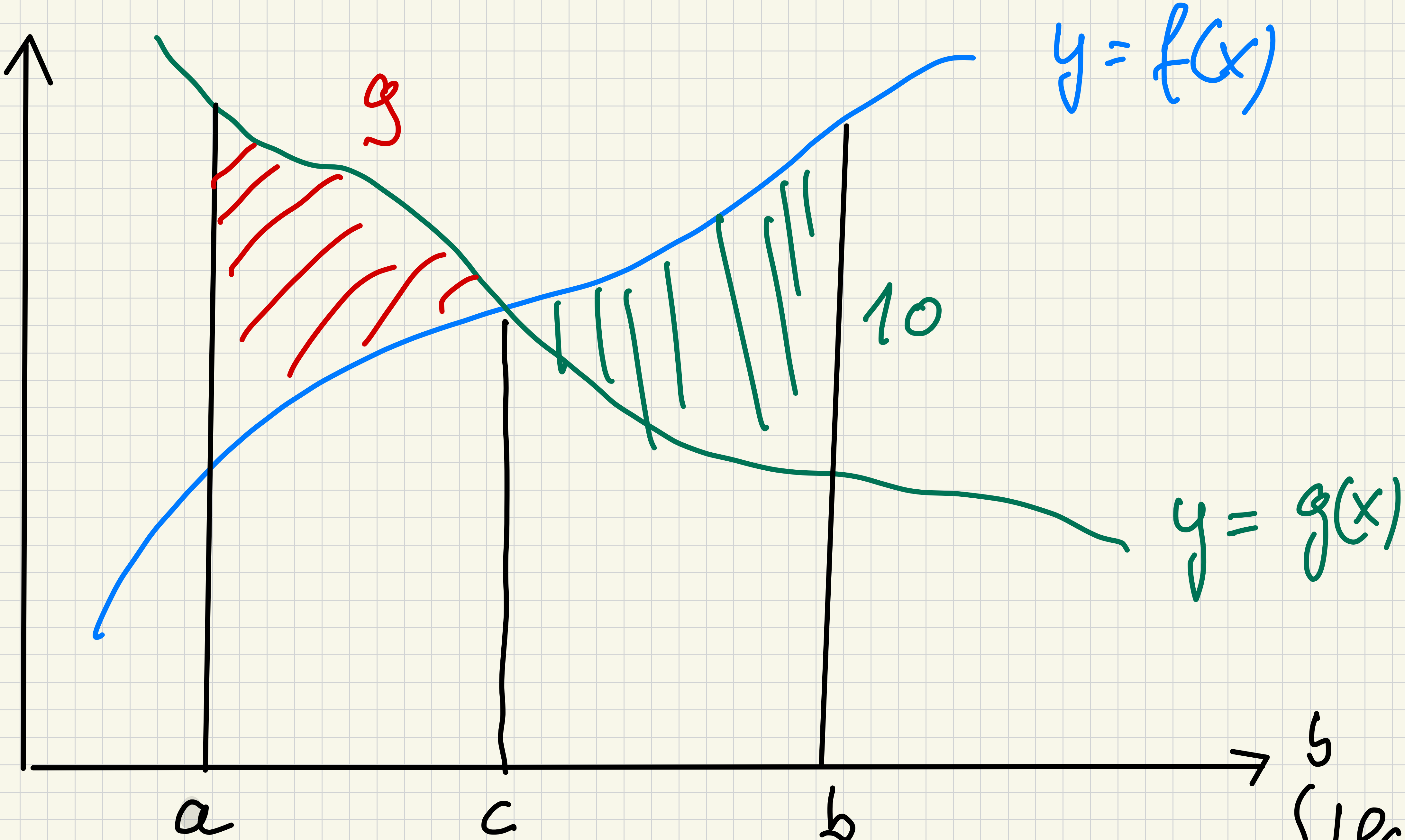
- En général, l'aire de la région entre les courbes et les droites $x = a$ et $x = b$ est donnée par :



$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Si $f(x)$ coupe $g(x)$ entre a et b en $x = c$, il faut séparer l'intégrale en deux !!!

Voir slide suivant



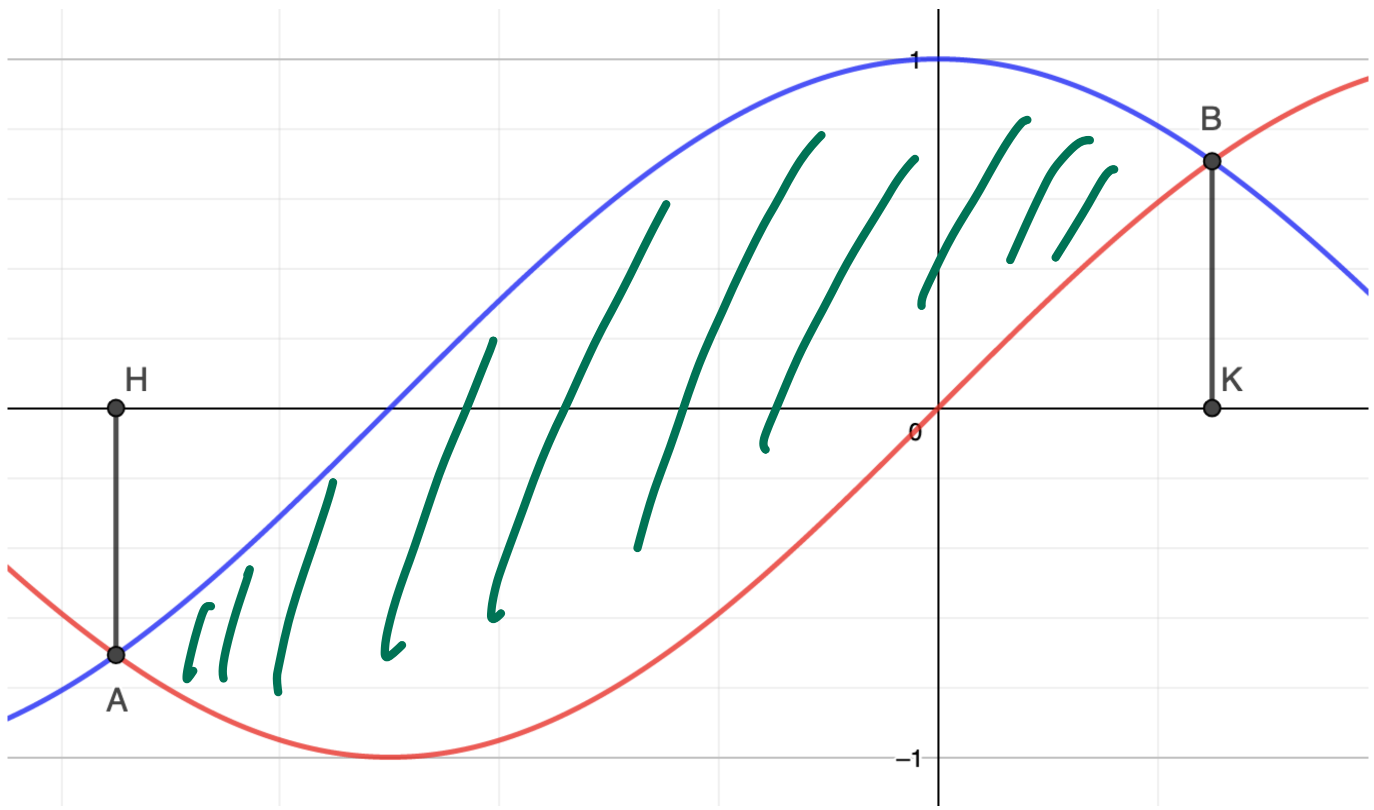
$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \quad - \quad$$

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

$$= \int_a^c g(x) - f(x)\,dx + \int_c^b f(x) - g(x)\,dx$$

Exercice

Calculer l'aire de la surface comprise entre les courbes décrites par les foncions $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.



$$\int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x))\,dx = \sin(x) + \cos(x) \Big|_{-3\pi/4}^{\pi/4}$$

$$2\sqrt{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

L'intégration par substitution

L'intégration par substitution découle de la règle de la dérivée de la fonction composée de deux fonctions.

Le but de cette technique est de simplifier l'intégrande pour que l'intégrale soit plus facile à calculer, la difficulté résidant dans la *recherche de la bonne substitution*.

Théorème (changement de variable)

Soit g une fonction dérivable sur l'intervalle $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle courant les valeurs $g(a)$ et $g(b)$, alors

$$\int_a^b f(g(x))\underline{g'(x)dx} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\underline{dz}$$

$z = g(x)$
$dz = g'(x) . dx$

Démonstration. Soit F une primitive de f, c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$. Considérons la fonction composée :

$$h(x) = (F \circ g)(x) = F(g(x)).$$

Par la règle de dérivation des fonctions composées :

$$h'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

La fonction h est donc une primitive de la fonction $(f \circ g) \cdot g'$, ce qui implique que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dt = F\big(g(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(g(a)) - F(g(b)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

$$z = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{dz}{dx}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{dz = g'(x)\,dx}$$

$$g'(x)\Big|_{x=x_0}$$

L'intégration par substitution

En résumé si on veut calculer l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

en faisant la substitution $\boxed{z = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = h(z)}$

on doit faire 3 substitutions

1.	la fonction:	$g(x)$	par	z	ou	x	par	$h(z)$
2.	la différentielle:	$g'(x)dx$	par	dz	ou	dx	par	$h'(z)dz$
3.	les bornes:	a par g(a) b par $g(b)$			ou ou	a par $h^{-1}(a)$ b par $h^{-1}(b)$		

Exemple

Calculer l'intégrales suivantes $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot x \; dx$

où $|x| < 1$, en utilisant l'intégration par substitution.

$\boxed{z = 1 - x^2} = g(x) \longrightarrow \boxed{dz = -2x\,dx}$

$\hookrightarrow x\,dx = -\frac{dz}{2}$

$g(0) = 1 \qquad g(1) = 0$

$g(1) = 0$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot x \cdot dx = \int_{g(0)=1}^{g(1)=0} \sqrt{z}\left(-\frac{1}{2}dz\right)$$

$x \cdot dx = -\frac{1}{2}dz$

$g(0) = 1$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{z}\,dz = -\frac{1}{2}\int_1^0 z^{1/2}\,dz = -\frac{1}{2}\left.\frac{z^{3/2}}{3/2}\right|_1^0 = \frac{1}{3}$$

$$\int_{-2}^{6} \frac{x-2}{\sqrt{x+3}}\,dx$$

$z = x + 3 = g(x)$

$dz = dx$

$g(-2) = 1 \qquad g(6) = 9$

$$= \int_{1}^{9} \frac{z-5}{\sqrt{z}}\,dz = \int_{1}^{9} \frac{z}{\sqrt{z}} - \frac{5}{\sqrt{z}}\,dz$$

$$= \int_{1}^{9} \sqrt{z} - \frac{5}{\sqrt{z}}\,dz = \left. \frac{z^{3/2}}{3/2} - 5\,\frac{z^{1/2}}{1/2} \right|_{1}^{9}$$

$\parallel$

$z^{1/2} \qquad -5 \cdot z^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{2}{3}(27-1) - 10(3-1)$$

$$= -8/3$$

$$\int \frac{x^2}{(x-3)^6}\,dx$$

$\boxed{z = x - 3} \Rightarrow x = z + 3$

$dz = dx$

$$= \int \frac{(z+3)^2}{z^6}\,dz = \int \frac{z^2 + 6z + 9}{z^6}\,dz$$

$$= \int z^{-4} + 6z^{-5} + 9z^{-6}\,dz$$

$$= \frac{z^{-3}}{-3} + 6 \cdot \frac{z^{-4}}{-4} + 9 \cdot \frac{z^{-5}}{-5}$$

$$= \frac{-1}{3z^3} - \frac{3}{2z^4} - \frac{9}{5}\,\frac{1}{z^5} + C$$

retour à x

$$= -\frac{1}{3 \cdot (x-3)^3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x-3)^4} - \frac{9}{5}\,\frac{1}{(x-3)^5} + C$$

Intégration par partie

$$\int (uv)' = \int u'v + \int uv'$$

$$uv = \int u'v + \int uv'$$

$$uv - \int uv' = \int u'v$$

$$\boxed{\int u'v = uv - \int uv'}$$

L'intégration par parties

Théorème (formule d'intégration par parties)

Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Démonstration. La formule d'intégration par parties découle de la règle de dérivation du produit de deux fonctions. Rappelons la règle de Leibniz pour la dérivation d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

La fonction $u'v + uv'$ est donc une primitive de la fonction uv. Grâce au théorème fondamental du calcul intégral, nous avons que

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

L’intégration par parties

Théorème (formule d’intégration par parties)

Soit u et v deux fonctions dérivables sur l’intervalle $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Cas particulier : en choisissant $u'(x) = 1$ dans formule d’intégration par parties, on obtient

$$\int_a^b v(x)dx = x \cdot v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b x \cdot v'(x)dx$$

C'est la méthode utilisée pour obtenir l'intégrale des fonctions ln, arctan, arccos et arcsin:

1. $\int \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - x + c$
2. $\int \arctan(x)dx = x \cdot \arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2}) + c$
3. $\int \arcsin(x)dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1+x^2} + c$
4. $\int \arccos(x)dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1+x^2} + c$

Exemple

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\, \underbrace{e^x}_{v'}\, dx = uv - \int u'v$$

$u' = 2x$

$v = e^x$

$$= x^2 e^x - 2\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'}\, dx$$

$u' = 1 \quad v = e^x$

$$= x^2 e^x - 2\left[uv - \int u'v\right]$$

$$= x^2 e^x - 2\left[x e^x - \underbrace{\int 1 \cdot e^x\, dx}_{e^x}\right] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

$$= e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$$

Rappel : $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

où F est une primitive de f, i.e. $F' = f$.

Substitution : $\int_a^b \overline{f(x)\,dx}$

$z = g(x)$
$dz = g'(x)\,dx$
$a \rightsquigarrow g(a)$
$b \rightsquigarrow g(b)$

$x = h(z)$
$dx = h'(z)\,dz$
$a \rightsquigarrow h^{-1}(a)$
$b \rightsquigarrow h^{-1}(b)$

Intégration par partie (I.P.P.)

$$\int u'v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

---

1. $\int 1 \cdot \ln(x)\, dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$u' = 1 \quad u = x$

$v = \ln(x) \quad v' = \frac{1}{x}$

$= x \ln(x) - \int 1\, dx =$

$= x \ln(x) - x + C$

2. $\int 1 \cdot \arctan(x)\, dx = x \arctan(x) - \int \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2}$

$u' = 1$

$v = \arctan(x)$

$u = x \quad v' = \frac{1}{1+x^2}$

$= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

Exemples

1. $$\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \underbrace{(-2x)}_{g'}\cdot\underbrace{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{g^{\alpha}}\,dx$$

$$\int g' g^{\alpha} = \frac{g^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$= (1-x^2)^{1/2}\cdot 2 + C$$

2. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{g'}{g} = \ln|g|$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$z = 1 - x^2 = g(x)$$
$$dz = -2x \cdot dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= g(x) \\ dz &= g'(x)\,dx \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \underbrace{x \cdot dx}_{-\frac{1}{2}dz}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1-z}{\sqrt{z}}\,dz = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz + \frac{1}{2}\int \sqrt{z}\,dz$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{z^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{2}\,\frac{z^{3/2}}{3/2} = -\sqrt{z} + \frac{1}{3}\sqrt{z^3}$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$$

$$\int \tan(x)\,dx = -\int \underbrace{-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}_{g'/g}\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

Exercice

Calculez la primitive suivante de trois façons différentes :

$$I = \int \sin(x)\underbrace{\cos(x)dx}_{= dz}$$

$$g' \cdot g \Rightarrow \frac{g^2}{2}$$

a) en utilisant une identité trigonométrique (formule de l'angle double);

b) en utilisant les techniques d'intégration par parties;

c) en utilisant l'intégration par substitution.

$$z = \sin(x) \qquad dz = \cos(x)\,dx$$

$$I = \int z \cdot dz = \frac{1}{2} z^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$$

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Démontrer la formule de réduction suivante :

$$\int \sin^n(x)dx = -\frac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx$$

1. $\int \sin^6(x)\,dx = ?$ 3 fois cette formule

$\longrightarrow$ long !!

2. $\int \cos(x)\sin^6(x)\,dx = \frac{1}{7}\sin^7(x) + C$

$\int g' \cdot g^6 = \frac{g^7}{7}$

plus facile que 1 !

3. $\displaystyle\int \cos^3(x)\sin^6(x)\,dx$

1 degré pair
1 degré impair

$$= \int \cos^2(x)\sin^6(x)\cos(x)\,dx$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$= \int \left(1 - \sin^2(x)\right)\sin^6(x)\,\boxed{\cos(x)\,dx}$$

$$= \int \underbrace{\sin^6(x)}_{g^6}\,\underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx - \int \underbrace{\sin^8(x)}_{g^8}\,\underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx$$

$$= \frac{1}{7}\sin^7(x) - \frac{1}{9}\sin^9(x) + C$$

$$\int \sin^6(x) \overbrace{\cos(x)\, dx}^{dz}$$

$$g^6 \cdot g'$$

$$z = \sin(x) \qquad dz = \cos(x)\, dx$$

$$= \int z^6 \, dz = \frac{1}{7} z^7 + C =$$

$$\frac{1}{7} \sin^7(x) + C$$

$$\int \frac{f(x) + g(x)}{h(x)}\, dx$$

$$\boxed{\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}}$$

$$= \int \frac{f}{h}\, dx + \frac{g}{h}\, dx = \underline{\int \frac{f}{h}\, dx} + \underline{\int \frac{g}{h}\, dx}$$

$$\frac{A}{B+C} \neq \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Intégration des fonctions rationnelles

Une **fonction rationnelle** est une fonction quotient de deux fonctions polynômes :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont deux polynômes.

- Une **décomposition en éléments simples** consiste à remplacer une expression complexe à intégrer par une somme d'expressions plus simples à manipuler, notamment en remplaçant une fonction rationnelle par une somme de fonctions rationnelles simples à intégrer.
- La primitive de f sera déterminée en trois étapes :
  1. Réduction au cas $\deg(P) < \deg(Q)$ par division euclidienne
  2. Factorisation du polynôme Q
  3. Intégration des fractions simples

Exemple

On veut évaluer $$I = \int \frac{2x^3 - 8x^2 + 9x - 1}{x^2 - 4x + 3}\, dx$$

Intégration des fractions simples

Les **fractions simples** s'intègrent en utilisant les formules suivantes:

Fractions simples de 1ère espèce: si le dénominateur est réductible de degré 2

1) $$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C$$

Pour $n \neq 1$

2) $$\int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x+a)^{n-1}} + C$$

Fractions simples de 2ème espèce: si le dénominateur est irréductible de degré 2

3) $$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\cdot\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right) + C$$

4) $$\int \frac{2x+b}{x^2+bx+d}\,dx = \ln|x^2+bx+d| + C$$

$$\int \frac{x+7}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-1)}$$

$$\int \frac{x+7}{x^2+2x+3} = A\ln\left(x^2+2x+3\right) + B \cdot \arctan\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

$$\int \frac{3}{x^2-4}\,dx = \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}\,dx$$

$$x^2-4 = (x-2)(x+2)$$

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{x^2-4}$$

$(x):\quad A + B = 0 \qquad A = -B$

$\qquad 2A - 2B = 3 \qquad 4A = 3 \quad A = \frac{3}{4} \Rightarrow B = -\frac{3}{4}$

$$= \int \frac{3/4}{x-2} - \frac{3/4}{x+2}\,dx = \frac{3}{4}\ln|x-2| - \frac{3}{4}\ln|x+2|$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

$$\int \frac{3}{x^2+4} = \int \frac{3}{x^2+2^2}\,dx$$

x^2+4 irréductible

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

formule 3
avec
$a = 0$
$b = 2$

Intégration des fonctions rationnelles

Exemples : calculer

1. $$I = \int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx$$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$

2. $$I = \int \frac{x+7}{x^2+2x-3}\,dx$$

$$1.\quad \int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + 2}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{g'}{g} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + x + 2\right| + C$$

$$I_2 = \int \frac{2}{x^2 + 2x + 2}\,dx = \int \frac{2}{(x+1)^2 + 1}\,dx$$

$a = 1 \qquad b = 1$

$$= \frac{2}{1} \cdot \arctan\left(\frac{x+1}{1}\right) + C$$

$$= 2\arctan(x+1) + C$$

2. $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{(x+7)\,dx}{(x-1)(x+3)}$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

$= \displaystyle\int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}\,dx$

$A(x+3) + B(x-1) = x+3$

$A = 2 \qquad B = -1$

$A + B = 1$

$3A - B = 7 \quad \Big| +$

$4A = 8$

$$= \int \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+3} \, dx$$

$$= 2 \ln|x-1| - \ln|x+3| + C.$$

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - x + 2}\,dx = I$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x + 1 & x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2} -(x^3 - x^2 + 2x) & x + 1 \\ \hline x^2 - x + 1 & \\ -(x^2 - x + 2) & \\ \hline -1 & \end{array}$$

division euclidienne

$$(x^3 + x + 1) = (x^2 - x + 2)(x + 1) - 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - x + 2} = x + 1 \quad \frac{-1}{x^2 - x + 2}$$

$$I = \int \underbrace{(x+1)}_{\frac{1}{2}x^2 + x} - \underbrace{\frac{1}{x^2 - x + 2}}_{I_2} \, dx$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2 - x + 2} \, dx$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$

$$= \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \, dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 2}{\sqrt{7}}\right) + C$$

$a = -\frac{1}{2} \quad b = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{7}}\right) + C$$